医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本大学医学部 N方式(1期) 二次試験　数学

2024年 2月11日実施

[I]

次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}} (5x-3)^6 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{e} \log 2x \ dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$

解答

(1)

$$\int_0^{\frac{2}{5}} (5x-3)^6 dx = \left[\frac{(5x-3)^7}{35}\right]_0^{\frac{2}{5}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2186}{35}}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3)

$$\int_1^{e} \log 2x \ dx = \Big[x\log 2x - x\Big]_1^{e}$$
$$= \boldsymbol{(e-1)\log 2 + 1}$$

(4)

$$\int_1^{2} \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \Big[\log\left|x^2+3x\right|\Big]_1^{2}$$
$$= \log 10 - \log 4 = \boldsymbol{\log\frac{5}{2}}$$

[II]

関数 $f(x) = (1+\cos x)^3 - 1 - 3\cos x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2)　$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x) \geqq 0$ であることを証明しなさい．

解答

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1+\cos x)^2 \cdot (-\sin x) + 3\sin x \\ &= -3\sin x\{(1+\cos x)^2 - 1\} \\ &= -3\sin x(\cos^2 x + 2\cos x) \\ &= -3\sin x\cos x(\cos x + 2) \end{aligned}$$

(2)　(1) より，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

さらに，

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)^3 - 1 - 3\cos\frac{\pi}{2} \\ &= 1^3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

であるから，

$0 \leqq x \leqq \pi$ において $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．

[Ⅲ]

$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\cos t - x\sin t)^2 dt$ により関数 $f(x)$ を定める.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t dt$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t dt$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ を求めて，その最小値を求めなさい.

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$\begin{aligned}\int t\cos^2 t dt &= \int t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int (t+t\cos 2t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{t^2}{2}+\left(\frac{t\sin 2t}{2}-\int\frac{1\cdot\sin 2t}{2}dt\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t\sin 2t}{2}+\frac{\cos 2t}{4}\right)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t dt &= \frac{1}{8}\Big[2t^2+2t\sin 2t+\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi^2-4}{16}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int t\sin t\cos t dt &= \frac{1}{2}\int t\sin 2t dt \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{t(-\cos 2t)}{2}-\int\frac{1\cdot(-\cos 2t)}{2}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{t\cos 2t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t dt &= \frac{1}{8}\Big[-2t\cos 2t+\sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$

(3)　$f(x)$ を整理すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\cos^2 t - 2x\sin t\cos t + x^2\sin^2 t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\{(1-x^2)\cos^2 t - 2x\sin t\cos t + x^2\}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(1-x^2)t\cos^2 t - 2xt\sin t\cos t + x^2 t\}dt \\
&= (1-x^2)\cdot\frac{\pi^2-4}{16} - 2x\cdot\frac{\pi}{8} + x^2\cdot\frac{\pi^2}{8} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2+4}{16}x^2 - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2-4}{16}} \\
&= \frac{\pi^2+4}{16}\left(x - \frac{2\pi}{\pi^2+4}\right)^2 - \frac{\pi^2+4}{16}\cdot\frac{4\pi^2}{(\pi^2+4)^2} + \frac{\pi^2-4}{16} \\
&= \frac{\pi^2+4}{16}\left(x - \frac{2\pi}{\pi^2+4}\right)^2 + \frac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)$ の最小値は $x = \dfrac{2\pi}{\pi^2+4}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}}$ である．

講評

［Ⅰ］［小問集合］(易)：基本的な定積分の出題であった。特に難しいところはなく，ここでは落とせない。

［Ⅱ］［数Ⅲ微分法］（易）：不等式の証明の問題であった。誘導もあり，特に難しいところもなく，ここでは落とせない。

［Ⅲ］［数Ⅲ積分法］（標準）：定積分で表された関数の最小値に関する問題であった。題材はありふれているが，計算にやや難儀する。ただ，時間も十分にあるので丁寧な計算を心がけたい。

　昨年度に比べてやや易しくなった。方針はすぐに浮かぶのでいかに計算を間違わないかの勝負であるように思う。満点を目指したい。