医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

杏林大学医学部　数学

2024年 1月19日実施

I

$\boxed{\text{キ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ．

原点を O とする座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 10$ と直線 $\ell : y = ax - 4a + 2$ がある．ただし，a は実数の定数とする．

(a)　直線 ℓ は，その傾き a の値によらず，定点 $\mathrm{F}\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を通る．

定数 a を変化させたとき，円 C と接するような直線 ℓ は 2 本存在する．これらの直線と円 C との接点を P, Q とすると，短い方の弧 PQ の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ である．

(b)　直線 ℓ が円 C と異なる 2 点で交わるとき，その交点を R, S とする．

線分 RS の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FM}} = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ．定数 a を変化させたとき，点 M が描く軌跡は原点 O を通り $\boxed{\text{キ}}$ の一部である．

また，定数 a を変化させた場合に △ORS の面積が最大となるのは，原点と直線 ℓ の距離が $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり，

$a = \dfrac{\boxed{\text{ケ}} \pm \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シス}}}$ のときである．

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① 点 F を焦点とする放物線	② 点 F を中心とする円
③ 線分 FO を直径とする円	④ 線分 FO を一辺にもつ正三角形の外接円
⑤ 点 F を焦点の 1 つとする楕円	⑥ 線分 FO を長軸とする楕円
⑦ 点 F を焦点の 1 つとする双曲線	⑧ 2 点 F，O を頂点とする双曲線

(c)　点 $\mathrm{T}(u,\ v)$ を直線 ℓ と楕円 $E : \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の共有点とする．

$\vec{\alpha} = \left(\dfrac{u}{\sqrt{10}},\ \dfrac{v}{2}\right)$，$\vec{\beta} = (a\sqrt{10},\ -2)$ とおくと，点 T が直線 ℓ 上にあることから

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \boxed{\text{セ}}\,a - \boxed{\text{ソ}}$ が成立する．また，点 T が楕円 E 上にあることから

$|\vec{\alpha}| = \boxed{\text{タ}}$ がいえる．

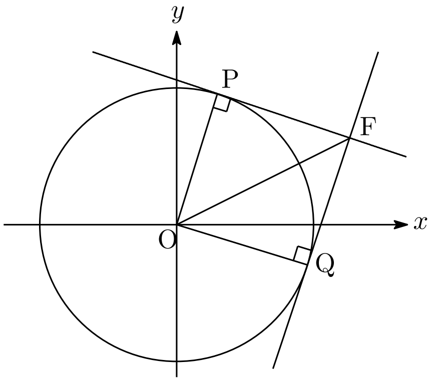
$-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leqq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leqq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ より，直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は

$\boxed{\text{チ}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ とわかる．

$a = \boxed{\text{チ}}$ のとき，直線 ℓ は楕円 E と点 $\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}}\right)$ で接し，直線 ℓ が円 C によって切り取られる線分 RS の長さは $\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ である．

解答

(a)



$$C \ : \ x^2+y^2=10$$

$$\ell \ : \ y=ax-4a+2$$

直線 ℓ は $y=a(x-4)+2$ と表せるので，a の値によらず定点 F$\mathbf{(4,\ 2)}$ を通る直線である．

$$\mathrm{OP}=\sqrt{10}$$

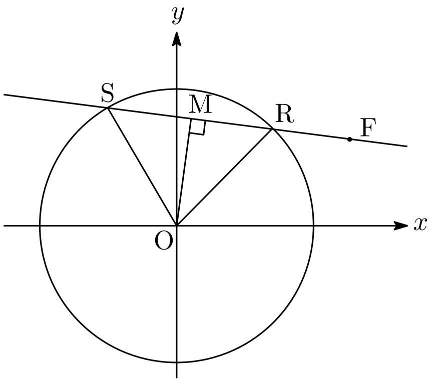
$$\mathrm{OF}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

$$\angle\mathrm{OPF}=90^\circ$$

であるから，$\triangle$OPF は OP $=$ PF の直角二等辺三角形である．
よって，$\angle\mathrm{POF}=45^\circ$ であることから，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ である．
したがって，短い方の弧の長さは

$$\sqrt{10}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}\pi}$$

(b)



OM $\perp$ FM であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\mathbf{0}$$

点 M は 2 定点 O，F に対して，常に $\angle\mathrm{OMF}=90^\circ$ を満たすので，点 M の軌跡は

線分 FO を直径とする円の一部（3）

である．

$\triangle$ORS の面積について，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ORS} &= \frac{1}{2}\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OS}\sin\angle\mathrm{ROS}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\sin\angle\mathrm{ROS}\\ &= 5\sin\angle\mathrm{ROS}\end{aligned}$$

であるから，$\angle$ORS の面積が最大となるのは，$\angle\mathrm{ROS} = 90^\circ$ のときである．
このとき，原点と直線 ℓ の距離は

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OR} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

さらに，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|-4a+2| = \sqrt{5(a^2+1)}$$

$$(-4a+2)^2 = 5(a^2+1)$$

$$11a^2-16a-1=0$$

$$\therefore\ a = \boldsymbol{\frac{8\pm5\sqrt{3}}{11}}$$

(c)　点 $\mathrm{T}(u,\ v)$ は直線 ℓ 上，楕円 E 上にあるので

$$v = au-4a+2\ \cdots\cdots①$$

$$\frac{u^2}{10}+\frac{v^2}{4} = 1\ \cdots\cdots②$$

を満たす．このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} &= \frac{u}{\sqrt{10}}\cdot a\sqrt{10}+\frac{v}{2}\cdot(-2)\\ &= au-2v\\ &= au-(au-4a+2) \qquad (\because\ ①)\\ &= \boldsymbol{4a-2}\end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{\alpha}\right| = \sqrt{\frac{u^2}{10}+\frac{u^2}{4}} = \boldsymbol{1} \qquad (\because\ ②)$$

これらを $-\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right| \leqq \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} \leqq \left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|$ に代入して，直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は (→注釈)

$$-1\cdot\sqrt{10a^2+1} \leqq 4a-2 \leqq 1\cdot\sqrt{4a-2}$$

$$(4a-2)^2 \leqq 10a^2+1$$

$$6a^2-16a \leqq 0$$

$$a(3a-8) \leqq 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{0 \leqq a \leqq \frac{8}{3}}$$

$a=0$ のとき，直線 ℓ は $y=2$ であり，楕円 E と点 $\mathbf{(0,\ 2)}$ で接する．
直角三角形 OMR に着目して

$$\begin{aligned}\mathrm{RS} &= 2\mathrm{MR} \\ &= 2\sqrt{\sqrt{10}^2-2^2} \\ &= \mathbf{2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ条件は

$$\begin{cases} v=au-4a+2 \\ \dfrac{u^2}{10}+\dfrac{v^2}{4}=1 \end{cases} \quad \text{を満たす点 } (u,\ v) \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{10}a\left(\dfrac{u}{\sqrt{10}}\right)-2\left(\dfrac{v}{2}\right)-4a+2=0 \\ \left(\dfrac{u}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(\dfrac{v}{2}\right)^2=1 \end{cases} \quad \text{を満たす点} \left(\dfrac{u}{\sqrt{10}},\ \dfrac{v}{2}\right) \text{が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} \text{直線 } L:\sqrt{10}aX-2Y-4a+2=0 \\ \text{円 } D:X^2+Y^2=1 \end{cases} \quad \text{が共有点をもつ}$$

$$\iff \frac{|4a-2|}{\sqrt{(\sqrt{10}a)^2+(-2)^2}} \leqq 1$$

$$\iff -1 \leqq \frac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}}{\left|\overrightarrow{\beta}\right|} \leqq 1$$

$$\iff -\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right| \leqq \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} \leqq \left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|$$

である．

Ⅱ

$\boxed{\text{セ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ.

実数 x の関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}-1$ に対し，座標平面上の $y=f(x)$ のグラフを C とする．また，実数の媒介変数 s を用いて次式で表される座標平面上の曲線を Γ とする.

$$x=s-1+\frac{2}{e^{2s}+1},\ y=\frac{2e^{s}}{e^{2s}+1}-1$$

ただし，e は自然対数の底である.

(a)　$s=\log_e 3$ としたときの曲線 Γ 上の点を P とする.

点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}+\log_e 3,\ -\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)$ であり，この点における曲線 Γ の法線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}(x-\log_e 3)+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

とかける.

(b)　x 座標が $\log_e 3$ である C 上の点を Q とする．点 Q の y 座標は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，$f'(\log_e 3)=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ が成り立つ．直線 ℓ は，点 Q における曲線 C の $\boxed{\text{セ}}$ である.

$\boxed{\text{セ}}$ の選択群

① 法線　② 接線　③ 接線と $\dfrac{\pi}{6}$ の角度で交わる直線

④ 接線と $\dfrac{\pi}{4}$ で交わる直線　⑤ 接線と $\dfrac{\pi}{3}$ の角度で交わる直線

(c)　原点 O と点 Q を結ぶ曲線 C の長さを d とすると，$d=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，$\dfrac{d}{\text{PQ}}=\boxed{\text{チ}}$ が成り立つ.

解答

(a)　$s=\log_e 3$ のとき，$e^{s}=3$ であるので

$$x=\log_e 3-1+\frac{2}{3^2+1}=-\frac{4}{5}+\log_e 3$$
$$y=\frac{2\cdot 3}{3^2+1}-1=-\frac{2}{5}$$

したがって，P$\left(\boldsymbol{\dfrac{-4}{5}+\log_e 3,\ -\dfrac{2}{5}}\right)$

また

$$\frac{dx}{ds}=1-\frac{4e^{2s}}{(e^{2s}+1)^2}$$
$$\frac{dy}{ds}=-\frac{2e^{s}(e^{2s}-1)}{(e^{2s}+1)^2}$$

であるので，$s=\log_e 3$ のとき，$\left(\dfrac{dx}{ds},\ \dfrac{dy}{ds}\right)=\left(\dfrac{64}{100},\ -\dfrac{48}{100}\right)$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-48}{64}=-\frac{3}{4}$$

したがって，法線 ℓ の傾きは $\dfrac{4}{3}$ より，その方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}\left\{x-\left(-\frac{4}{5}+\log_e 3\right)\right\}-\frac{2}{5} \\ &= \frac{4}{3}(x-\log_e 3)+\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}-\frac{2}{5} \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}(x-\log_e 3)+\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(b)　点 Q の y 座標 $f(\log_e 3)$ は

$$f(\log_e 3)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

また，$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{2}e^{-x}$ より

$$f'(\log_e 3)=\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

したがって，点 $\mathrm{Q}\left(\log_e 3,\ \dfrac{2}{3}\right)$ における曲線 $C: y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=\frac{4}{3}(x-\log_e 3)+\frac{2}{3}$$

であり，これは直線 ℓ そのものであるので，直線 ℓ は点 Q における曲線 $C: y=f(x)$ の **接線 (②)** である．

(c)　$d=\displaystyle\int_0^{\log_e 3}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ である．

$$\begin{aligned} 1+\{f'(x)\}^2 &= 1+\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2 \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{\log_e 3}\left|\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right|dx \\ &= \int_0^{\log_e 3}\left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^{\log_e 3}=\boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{6}{15}\right)=\dfrac{4}{15}(3,\ 4)$ より

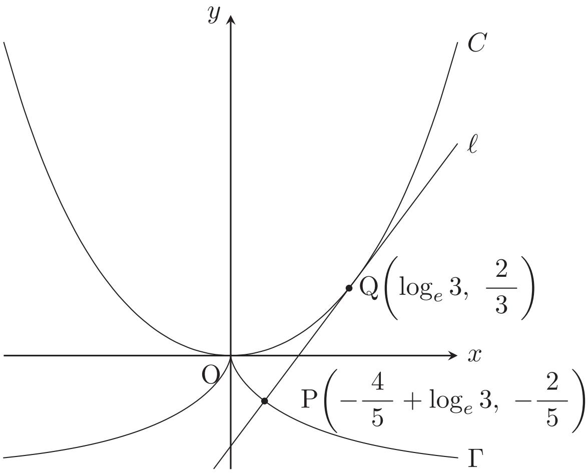
$$\mathrm{PQ}=\frac{4}{15}\sqrt{3^2+4^2}=\frac{4}{3}$$

よって

$$\frac{d}{\mathrm{PQ}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \mathbf{1}$$

注釈

本問の図を描くと次のようになる．曲線 Γ は曲線 C のインボリュート (伸開線) になっている．



ちなみに，$\mathrm{Q}(s,\ f(s))$ としてインボリュート (伸開線) の図形の方程式を計算する．（曲線 C 上の原点 O から点 Q までの長さを d とし，曲線 C 上の点 Q における接線上に点 Q からの距離が d である点 P をとり，点 P の軌跡を考える．ただし，$s>0$ のとき点 P の x 座標は点 Q の x 座標より小さく，$s<0$ のとき点 P の x 座標は点 Q の x 座標より大きいものとする.）似たような計算は直近でも 2021 慶應義塾大学医学部で出題されている．難関私大医学部（慶應義塾大学，東京慈恵会医科大学，日本医科大学）の受験生はぜひ取り組んでほしい．

まず $s>0$ のときを考える．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であり，点 Q における接線の傾きは $f'(s)$ より
$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{d}{\sqrt{1+\{f'(s)\}^2}}(-1,\ -f'(s))$ とかける．ここで

$$\begin{aligned}1+\{f'(x)\}^2 &= 1+\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}d &= \int_0^s \left|\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right| dx\\ &= \int_0^s \left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right) dx\\ &= \left[\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^s = \frac{1}{2}e^s-\frac{1}{2}e^{-s} = f'(s)\end{aligned}$$

また $\sqrt{1+\{f'(s)\}^2}=\dfrac{1}{2}e^s+\dfrac{1}{2}e^{-s}(=f(s)+1)$ と計算されるので

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\
&=(s,\ f(s))+\frac{d}{\sqrt{1+\{f'(s)\}^2}}(-1,\ -f'(s))\\
&=(s,\ f(s))+\frac{f'(s)}{f(s)+1}(-1,\ -f'(s))\\
&=\left(s-\frac{f'(s)}{f(s)+1},\ f(s)-\frac{\{f'(s)\}^2}{f(s)+1}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
s-\frac{f'(s)}{f(s)+1}&=s-\frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}\\
&=s-\frac{(e^{2s}-1)+2}{e^{2s}+1}\\
&=s-1+\frac{2}{e^{2s}+1}\\
f(s)-\frac{\{f'(s)\}^2}{f(s)+1}&=f(s)+1-\frac{\{f'(s)\}^2}{f(s)+1}-1\\
&=\frac{\{f(s)+1\}^2-\{f'(s)\}^2}{f(s)+1}-1\\
&=\frac{1}{f(s)}-1\\
&=\frac{2e^s}{e^{2s}+1}-1
\end{aligned}$$

となる．$s<0$ のときも同様に計算すればよい．なお，計算は $f(x)-1=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$ (カテナリー (懸垂線)) とすると，$\{g(x)\}^2-\{g'(x)\}^2=1,\ g''(x)=g(x)$ などが成り立つことを意識して計算した.

III

$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものをそれぞれ一つずつ選べ.

原点を O とする複素数平面上に 2 点 A(α), B(β) がある．ただし, i を虚数単位として $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であり，$\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とする．$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表し，複素数 z の偏角 $\arg z$ の範囲は $0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする.

(a) γ の実部を s，虚部を t とすると，

$$s=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$|\gamma|=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad \arg\gamma=\frac{\pi}{\boxed{\text{カキ}}}$$

が成り立つ.

また，2 点 O，B を通る直線に関して点 A と対称な点 D(δ) について

$$\arg\frac{\delta-\alpha}{\beta}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$$

が成り立ち，

$$\delta=\alpha\times\frac{i+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を満たす.

(b) 自然数 n に対して γ^n が純虚数となる最小の n は $\boxed{\text{シ}}$ である.

また，$|\gamma^{-n}|>2024$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{スセ}}$ である.

(c) 2 点 O，A を通る直線に関して点 P(z) と対称な点を表す複素数を $\mathring{z}$ と表記する.

自然数 n について，次の式で表される複素数平面上の点列 $\{z_n\}$ を考える.

$$z_1=\beta,\qquad z_{n+1}=z_n+\gamma(\mathring{z}_n-z_n)\qquad (\text{ただし，}n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

点列 $\{z_n\}$ は複素数平面内で実軸と $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ の角度で交わる直線上に存在する.

また，$\arg z_n+\arg\mathring{z}_n=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，z_n の極形式を考えると任意の自然数 n に対して $\mathring{z}_n=\boxed{\text{チ}}$ と表せるので，点列 $\{z_n\}$ は次式を満たす.

$$\mathring{z}_{n+1}=\mathring{z}_n+\boxed{\text{ツ}}\times(z_n-\mathring{z}_n)\,.\qquad (\text{ただし，}n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

自然数 n に対し $|\mathring{z}_n-z_n|$ は公比 $\boxed{\text{テト}}s+\boxed{\text{ナ}}$ の等比数列（ただし s は γ の実部）をなし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\mathring{z}_n-z_n|=\boxed{\text{ニ}}$ となる.

以上から，

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}},\quad \lim_{n\to\infty}|z_n|=\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}s}$$

とわかる．

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

① iz_n　② $-z_n$　③ $-iz_n$　④ $\dfrac{1}{z_n}$　⑤ $\overline{z_n}$

⑥ $i\overline{z_n}$　⑦ $-\overline{z_n}$　⑧ $-i\overline{z_n}$　⑨ $(\overline{z_n})^{-1}$　⓪ $i\,(\overline{z_n})^{-1}$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① γ　② $i\gamma$　③ $(-\gamma)$　④ $(-i\gamma)$　⑤ $\overline{\gamma}$　⑥ $i\overline{\gamma}$　⑦ $(-\overline{\gamma})$　⑧ $(-i\overline{\gamma})$

$\boxed{\text{解答}}$

(a)　$\gamma = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{8} = \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$ より

$s = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$，$t = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$ である．

$\alpha = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\beta = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるため，$|\gamma| = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$\arg\gamma = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}}$ である．

点 D は直線 OB に関して点 A と対称であるため，直線 OB と直線 AD は直交する．よって $\arg\dfrac{\delta-\alpha}{\beta} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ である．

同じく対称性から $\arg\dfrac{\delta}{\beta} = \arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\pi}{12}$ より $\arg\dfrac{\delta}{\alpha} = \dfrac{\pi}{6}$ である．点 A と点 D は直線による対称移動で写った点であるため $|\delta| = |\alpha|$ に注意すると $\delta = \alpha \times \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるため，求める数は $\boldsymbol{\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}}$ である．

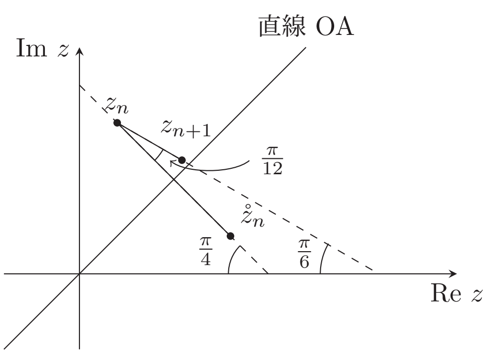
(b)　$\gamma = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ であるため，

$$\gamma^n = \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right).$$

よって，γ^n が純虚数となる最小の n は $\mathbf{6}$ である．

また，任意の整数 n で $\left|\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12}\right| = 1$ より $|\gamma^{-n}| = 2^n$ であるため，$2^n > 2024$ を満たす最小の n を求めればよい．$2^{11} = 2048$ であるため，答えは $\mathbf{11}$ である．

(c)　漸化式から $z_{n+1} - z_n = \gamma(\mathring{z}_n - z_n)$ となるため $\arg(z_{n+1} - z_n) = \dfrac{\pi}{12} + \arg(\mathring{z}_n - z_n)$ である．下図より実軸と $\dfrac{\pi}{6}$ の角度で交わる．



直線 OA は実軸と $\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるため，$\arg\mathring{z}_n + \arg z_n = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ である．

直線 OA に関する対称移動は,

(i) $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転

(ii) 複素共役で反転

(iii) $\dfrac{\pi}{4}$ 回転

の 3 ステップで分けられるため,

$$\begin{aligned}\mathring{z}_n &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\overline{\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)z_n}\\ &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\overline{z_n}\\ &= i\overline{z_n}\end{aligned}$$

となる．よって答えは 6 である．

$\mathring{z}_n$ を直線 OA に関して対称移動すると z_n になるため，$z_n = i\overline{\mathring{z}_n}$ となる．与えられた漸化式にこれを代入すると，

$$i\overline{\mathring{z}_{n+1}} = i\overline{\mathring{z}_n} + \gamma\left(i\overline{z_n} - i\overline{\mathring{z}_{n+1}}\right)$$

となる．両辺を i で割り複素共役を取ると

$$\mathring{z}_{n+1} = \mathring{z}_n + \overline{\gamma}\times(z_n - \mathring{z}_n)$$

となる．よって答えは 5.

上の式と与式の差を取ると,

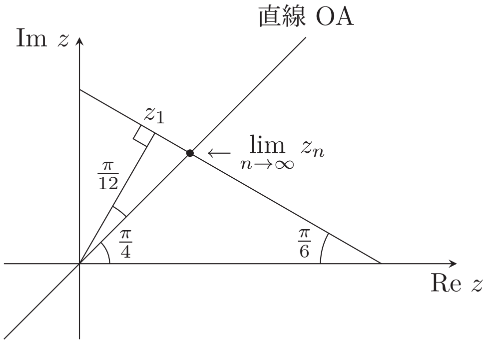
$$\begin{aligned}\mathring{z}_{n+1} - z_{n+1} &= \mathring{z}_n - z_n + \overline{\gamma}(z_n - \mathring{z}_n) - \gamma(\mathring{z}_n - z_n)\\ &= \{1-(\gamma+\overline{\gamma})\}(\mathring{z}_n - z_n)\end{aligned}$$

となる．よって，数列 $\{|\mathring{z}_n - z_n|\}$ は公比 $1-(\gamma+\overline{\gamma}) = \boldsymbol{-2s+1}$ の等比数列である．

$-2s+1 = 1-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である．$0 < \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} < 1$ であるため $|-2s+1| < 1$ となる．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\mathring{z}_n - z_n| = \boldsymbol{0}$ である．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\mathring{z}_n - z_n) = 0$ となるため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\arg\mathring{z}_n - \lim_{n\to\infty}\arg z_n = 0$ である．一方 $\arg\mathring{z}_n + \arg z_n = \dfrac{\pi}{2}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathring{z}_n + \lim_{n\to\infty}z_n = \dfrac{\pi}{2}$ である．これらの連立方程式を解くことで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\arg z_n = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$.

任意の n について z_n は実軸と $\dfrac{\pi}{6}$ の角度で交わる直線上にある．一方，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\arg z_n = \dfrac{\pi}{4}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n$ は下図の 2 直線の交点に収束する．



$a = \displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n|$ とおくと，図より $\dfrac{|z_1|}{a} = \cos\dfrac{\pi}{12}$ となる．$s = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}$ であったため，$a = \boldsymbol{\dfrac{1}{2s}}$ となる．

$\boxed{\text{注釈}}$

z_n が乗る直線と実軸の成す角度を計算する際，z_n が常に直線 OA の上に存在する（式で書くと $\arg z_n \geqq \dfrac{\pi}{4}$）

必要があるが，1 つめの図を見ると帰納的に $\arg z_n > \dfrac{\pi}{4}$ であることが分かる．
実際に証明するには次のように書くとよいだろう．
$n = z_1$ は定義より明らか．$n = k$ で $\arg z_k > \dfrac{\pi}{4}$ を仮定する．
$|\gamma| = \dfrac{1}{2}$ であるため，$|\gamma(\mathring{z}_k - z_k)| = \dfrac{1}{2}|\mathring{z}_k - z_k|$ である．z_k と直線 OA の距離は $\dfrac{1}{2}|\mathring{z}_k - z_k|$ であることから，z_k からの距離が $\dfrac{1}{2}|\mathring{z}_k - z_k|$ である点で arg が $\dfrac{\pi}{4}$ より大きくならないものは，直線 OA 上の点で z_k との距離が $\dfrac{1}{2}|\mathring{z}_k - z_k|$ となる点，つまり $\dfrac{1}{2}(\mathring{z}_k + z_k) = z_k + \dfrac{1}{2}(\mathring{z}_k - z_k)$ のみ．
$\arg\gamma = \dfrac{\pi}{12}$ であることから $\gamma(\mathring{z}_k - z_k) \neq \dfrac{1}{2}(\mathring{z}_k - z_k)$ であるため，z_{k+1} は $\dfrac{1}{2}(\mathring{z}_k + z_k)$ と不一致．ゆえに $\arg z_{k+1} > \dfrac{\pi}{4}$ となる．

注釈

問題文から $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ などは存在するものとして計算した．

講評

Ⅰ［図形と方程式，ベクトル，二次曲線］（やや易）：固定点を通る直線と円や楕円の交わりについての問題であった．素直に誘導に乗れば解けるであろう．ここでは得点をしたい．

Ⅱ［微分積分］（標準）：媒介変数表示された曲線についての問題であった．基本的な計算が多い．計算ミスがないよう着実に解きたい．

Ⅲ［極限，複素平面］（やや難）：複素平面上の数列を考察する問題であった．前半は基本的であるためミスは避けたい．後半は見慣れないタイプの問題であった．丁寧な計算と図形的な考察がポイントとなる．ここは差が付いただろう．

全体的に解きやすい出題が多かった．しかし微分の計算，複素数などミスも発生しやすい問題が多い．基本的な問題を着実に得点できるかがポイントであろう．1 次突破ボーダーは 65 %程度か．

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ
0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校
0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録