医学部専門予備校 YMS　医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

昭和大学医学部（Ⅰ期）　数学

2023年2月4日実施

1

i を虚数単位として，複素数 $z=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ を考える。次の $\boxed{}$ を適切な数値で埋めよ。ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ。

$w=z+z^3$ とし，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。このとき $w+\overline{w}=\boxed{(1)}$ である。$w\cdot\overline{w}$ の実部は $\boxed{(2)}$ であり，虚部は $\boxed{(3)}$ である。点 z^2 と z^3 を焦点とし，焦点からの距離の差の大きさが z^2 の虚部で定まる双曲線を考える。この双曲線の漸近線の傾きの絶対値は $\boxed{(4)}$ である。

解答

本解説では，

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

であることを既知として説明をする (注釈参照)。

ド・モアブルの定理より

$$z^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\cdots\cdots①$$

さらに，これより

$$z^5=1\iff (z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0$$

$z\neq -1$ より　$z^4+z^3+z^2+z+1=0\cdots\cdots②$

また，$|z|=1$ より

$$|z|^2=1\iff z\cdot\overline{z}=1\iff \overline{z}=\frac{1}{z}\cdots\cdots③$$

が成り立つので，①，②，③ より

$$\begin{aligned}w+\overline{w}&=\left(z+z^3\right)+\overline{\left(z+z^3\right)}\\&=z+z^3+\overline{z}+\overline{z^3}\\&=z+z^3+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}\\&=z+z^3+z^4+z^2\\&=\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)-1\\&=0-1\\&=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} w\cdot\overline{w} &= \left(z+z^3\right)\overline{\left(z+z^3\right)} \\ &= z\overline{z}+z\overline{z^3}+z^3\overline{z}+z^3\overline{z^3} \\ &= 1+(\overline{z})^2+z^2+1 \\ &= 2+z^2+\overline{z^2} \\ &= 2+2\cos\frac{4}{5}\pi \\ &= 2+2\left(2\cos^2\frac{2}{5}\pi-1\right) \\ &= 4\cos^2\frac{2}{5}\pi \\ &= 4\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

ゆえに，$w\cdot\overline{w}$ の実部は $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$，虚部は $\mathbf{0}$ である。

次に，$z^2=\cos\dfrac{4}{5}\pi+i\sin\dfrac{4}{5}\pi$, $z^3=\cos\dfrac{6}{5}\pi+i\sin\dfrac{6}{5}\pi$ より，z^2 と z^3 は実軸対称である。これより，実軸と正の方向に $\cos\dfrac{4}{5}\pi$ だけ平行移動した双曲線を考える。xy 平面で考えると，この双曲線は 2 焦点が $\left(0,\ \pm\sin\dfrac{4}{5}\pi\right)$ であり，2 焦点からの距離の差が $\mathrm{Im}\ z^2=\sin\dfrac{4}{5}\pi$ である。（$\mathrm{Im}\ z^2$ で z^2 の虚部を表している。）

求める双曲線の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\quad(a>0,\ b>0)$$

とおくと，焦点の座標から

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sin\frac{4}{5}\pi\cdots\cdots④$$

さらに，距離の差より

$$2b=\sin\frac{4}{5}\pi\iff b=\frac{1}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$$

よって，これを④に代入することで，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{4}{5}\pi$ を得る。双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の漸近線の傾きは $\pm\dfrac{b}{a}$ であることから，

$$\left|\pm\frac{b}{a}\right|=\frac{b}{a}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

注釈

$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ は以下のようにして求める。$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ とすると，一般に $\cos2\theta=\cos3\theta$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} \cos2\theta=\cos3\theta &\iff 2\cos^2\theta-1=4\cos^3\theta-3\cos\theta \\ &\iff (\cos\theta-1)\left(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1\right)=0 \\ &\iff \cos\theta=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

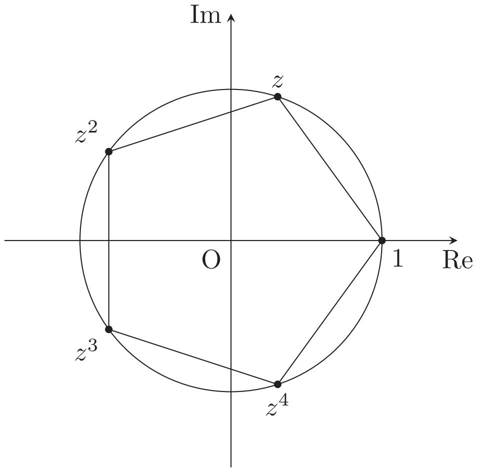
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

つまり　$\cos\dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

しかし，試験中にこの計算をするのは時間を浪費することになり，$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の値は暗記しておくことが望ましいだろう。

注釈

複素数平面上で $1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5$ の位置は，次の図のようになる。本解説では $z^2 = \cos\dfrac{4}{5}\pi + i\sin\dfrac{4}{5}\pi,\ z = \cos\dfrac{6}{5}\pi + i\sin\dfrac{6}{5}\pi$ から，z^2 と z^3 は実軸対称であることを説明したが，試験時間を考えると，この図を最初に書いて対称性を判断するべきだろう。



$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　実数 $a,\ b,\ c$ が

$$a+b+c=8,\ a^2+b^2+c^2=32$$

を満たすとき，c のとりうる範囲を不等式を用いて表せ。

(2)　次の不等式を満たす実数 x の範囲を求めよ。

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqq 21\left(\frac{1}{2}\right)^x - 20$$

(3)　同一平面上にあるベクトル $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ は $|\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=5,\ |3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=5$ をみたすように動く。このとき，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ の値がとりうる範囲を不等式を用いて表せ。

(4)　$a,\ b$ は 1 より大きく相異なる実数とする。次の問いに答えよ。

(4-1)　$x=\log_a\sqrt{ab},\ y=\log_{\sqrt{ab}} b$ とする。$x,\ y$ の大小関係を不等式を用いて表せ。

(4-2)　$w=\log_{\frac{a+b}{2}} b$ とする。$y,\ w$ の大小関係を不等式を用いて表せ。

(4-3)　$z=\log_a \dfrac{a+b}{2}$ とする。$x,\ y,\ w,\ z$ の大小関係を不等式を用いて表せ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$a+b+c=8 \iff b=8-a-c$ を $a^2+b^2+c^2=32$ に代入して a について整理すると

$$a^2+(8-a-c)^2+c^2=32$$

$$\iff a^2+(c-8)a+c^2-8c+16=0$$

a が実数であることより，判別式 D は

$$\begin{aligned} D \geqq 0 &\iff (c-8)^2-4(c^2-8c+16)\geqq 0 \\ &\iff c(3c-16)\leqq 0 \\ &\iff \boldsymbol{0 \leqq c \leqq \frac{16}{3}} \end{aligned}$$

(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = X\ (>0)$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &\iff X^3-21X+20\leqq 0 \\ &\iff (X+5)(X-1)(X-4)\leqq 0 \end{aligned}$$

$X>0$ に注意して，$1\leqq X\leqq 4$ となるので

$$\begin{aligned} 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 4 &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^0 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ &\iff \boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 0} \end{aligned}$$

(3)　$\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=\overrightarrow{x}$，$3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{y}$ とおくと，$\overrightarrow{a}=\dfrac{\overrightarrow{x}+3\overrightarrow{y}}{10}$，$\overrightarrow{b}=\dfrac{3\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}}{10}$ であり，$|\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=5$，$|3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=5$ より，$|\overrightarrow{x}|=5$，$|\overrightarrow{y}|=5$ である。

ここで

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\left|\frac{\overrightarrow{x}+3\overrightarrow{y}}{10}+\frac{3\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}}{10}\right|$$
$$=\frac{|2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}|}{5}$$

であり，$\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}|^2 &= 4|\overrightarrow{x}|^2+4\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+|\overrightarrow{y}|^2\\ &= 4\cdot 5^2+4\cdot 5\cdot 5\cos\theta+5^2 \quad (\because |\overrightarrow{x}|=|\overrightarrow{y}|=5)\\ &= 125+100\cos\theta\end{aligned}$$

である。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ から $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

$$25 \leqq |2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}|^2 \leqq 225 \iff 5 \leqq |2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}| \leqq 15 \quad (\because |2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}| \geqq 0)$$

であるから，求める $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\dfrac{|2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}|}{5}$ のとりうる範囲は

$$\boldsymbol{1 \leqq |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}| \leqq 3}$$

(4)(4-1)　$y=\dfrac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}}$ より

$$\begin{aligned}x-y &= \log_a\sqrt{ab}-\frac{\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}\\ &= \frac{(\log_a\sqrt{ab})^2-\log_a b}{\log_a\sqrt{ab}}\\ &= \frac{(\log_a b+1)^2-4\log_a b}{2(\log_a b+1)}\\ &= \frac{(\log_a b-1)^2}{2(\log_a b+1)}>0 \quad (a>1,\ b>1,\ a \fallingdotseq b)\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y<x}$ である。

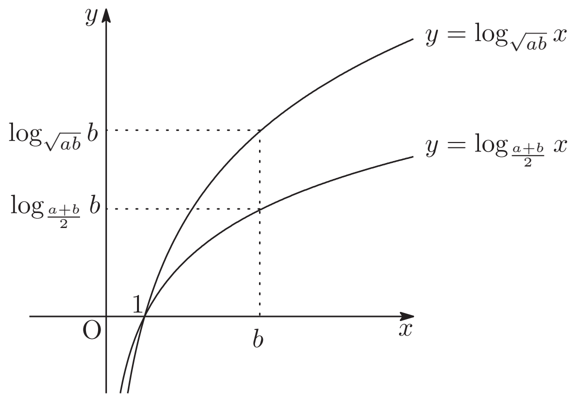
(4-2)　$a>1>0,\ b>1>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係を考えて

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \quad (\because a \fallingdotseq b)$$

よって，$\dfrac{a+b}{2}>1,\ \sqrt{ab}>1,\ b>1$ に注意すると $\log_{\frac{a+b}{2}} b<\log_{\sqrt{ab}} b$ であるから，$\boldsymbol{w<y}$ である。

注釈

グラフをイメージすると次のようになっている。



(4-3)　(4-1)(4-2) より，$w<y<x$　$\cdots\cdots$① が成り立つ。$x\left(=\log_a\sqrt{ab}\right)$ と $z\left(=\log_a\dfrac{a+b}{2}\right)$ を比べると，

$a>1$，$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ に注意して，$\log_a\sqrt{ab}<\log_a\dfrac{a+b}{2}$ である，すなわち $x<z$　$\cdots\cdots$② である。

よって，①②より $\boldsymbol{w<y<x<z}$ である。

注釈

(4) 全体を通して答えを求めるだけなので，$a=2$，$b=8$ あたりを代入して具体的な値で大小比較をしてもよい。

$\boxed{3}$

xy 平面上で，直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ を ①，第 1 象限上かつ直線 ① 上に存在し，原点 O(0, 0) から距離 5 の点を A とする。また，軸が y 軸に平行で，A を通り，原点 O で ① と交わる放物線を ② とする。ただし，放物線 ② の原点 O における接線は直線 ① と直交する。さらに，放物線 ② 上で OA 間に存在する点を P とし，その x 座標を p とする。点 P を通り直線 ① と直交する直線と直線 ① との交点を B として，線分 PB の長さを h とし，線分 OB の長さを t とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 点 A の座標を求めよ。

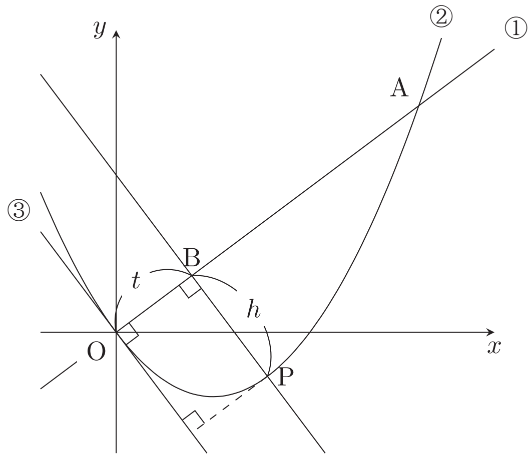
(2) 放物線 ② の方程式を x，y を用いて表せ。

(3) h を p を用いて表せ。

(4) t を p を用いて表せ。

(5) 直線 ① と放物線 ② で囲まれる範囲について，直線 ① を軸として回転したときにできる立体の体積を V とする。体積 V を求めよ。

解答



(1) A$\left(t,\ \dfrac{3}{4}t\right)$ とおく。$5=\sqrt{t^2+\left(\dfrac{3}{4}t\right)^2}=\dfrac{5}{4}t$ より $t=4$ である。よって A$\mathbf{(4,\ 3)}$ である。

(2) 放物線 ② の式を $y=ax^2+bx+c$ とおく。
② の原点における接線を ③ とおく。$(ax^2+bx+c)'=2ax+b$ より，③ の傾きは b である。一方，③ は ① と直交するため，傾きは $-\dfrac{4}{3}$ である。ゆえに $b=-\dfrac{4}{3}$ となる。
② は O を通る。(0, 0) を代入すると $c=0$ を得る。
$b=-\dfrac{4}{3}$，$c=0$，(4, 3) を代入すると $3=16a-\dfrac{16}{3}$ であるため $a=\dfrac{25}{48}$ となる。
こうして $\boldsymbol{y=\dfrac{25}{48}x^2-\dfrac{4}{3}x}$ となる。

(3)　h は点 P と ① の距離であるため，点と直線の距離の公式より

$$h = \frac{\left|3p - 4\left(\frac{25}{48}p^2 - \frac{4}{3}p\right)\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\left|-\frac{25}{12}p^2 + \frac{25}{3}p\right|}{5} = \frac{5}{12}|-p^2+4p|$$

である。点 P は点 O と点 A の間にあるため，$0 < p < 4$ である。よって不等号を外すと

$$h = \boldsymbol{\frac{5}{12}(4p-p^2)}$$

である。

(4)　① と ③ は直交する。また線分 OB は ① 上にある。よって $t = \mathrm{OB}$ は，点 B と ③ の距離である。
直線 PB もまた ① と直交するため，直線 PB と ③ は平行である。ゆえに点 B と ③ の距離と点 P と ③ の距離は等しい。
以上より

$$t = \frac{\left|4p + 3\left(\frac{25}{48}p^2 - \frac{4}{3}p\right)\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\left|4p + \frac{25}{16}p^2 - 4p\right|}{5} = \boldsymbol{\frac{5}{16}p^2}$$

である。

(5)　V は $\displaystyle\int_0^5 \pi h^2 dt$ である。これに (2)，(3) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^5 \pi h^2 dt \\
&= \pi\int_0^4 \left\{\frac{5}{12}(4p-p^2)\right\}^2 \cdot \frac{5}{8}p\,dp \\
&= \frac{5^3}{12^2\cdot 8}\pi\int_0^4 p^3(4-p)^2 dp \\
&= \frac{5^3}{2^7 3^2}\frac{3!\cdot 2!}{(3+2+1)!}4^6\pi \\
&= \frac{5^3}{2^7 3^2}\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 5}2^{12}\pi \\
&= \frac{2^3\cdot 5^2}{3^3}\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{200}{27}\pi}
\end{aligned}$$

となる。なお，第一種オイラー積分の公式（ベータ関数の公式）を用いた。

注釈

ベータ関数を知らなくても地道に計算すれば答えにたどり着くことができる。数字が大きくなるため，適宜素因数分解して見通しをよくすると良いだろう。

第 1 種オイラー積分の公式

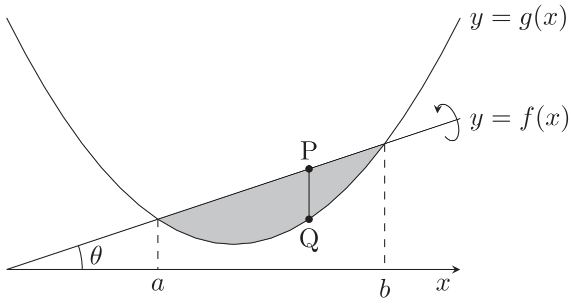
$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{(-1)^n m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

別解

今回の問題のように軸が傾いた回転体（斜軸回転体）の積分公式がある。

斜軸回転体の積分公式

$$V=\int_a^b \pi \mathrm{PQ}^2\cos\theta dx=\int_a^b \pi\{f(x)-g(x)\}^2\cos\theta dx$$



これを用いると次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^4 \pi\left\{\left(\frac{25}{48}x^2-\frac{4}{3}x\right)-\frac{3}{4}x\right\}^2\cdot\frac{4}{5}dx\\
&=\frac{4}{5}\cdot\frac{25^2}{48^2}\pi\int_0^4 x^2(4-x)^2dx\\
&=\frac{2^2}{5}\cdot\frac{5^4}{2^8 3^2}\cdot\frac{2!\cdot 2!}{5!}4^5\pi\\
&=\frac{2^2}{5}\cdot\frac{5^4}{2^8 3^2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}2^{10}\pi\\
&=\boldsymbol{\frac{200}{27}\pi}
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

1 から n までの自然数を重複なく 1 枚に 1 つずつ記した n 枚のカードを用意した。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　n 枚のカードから同時に 2 枚のカードを選ぶ。カードに記された数字の和が $n+1$ より小さい場合が何通りあるか調べたい。

(1-1)　$n=8$ のとき何通りあるか。

(1-2)　$n=9$ のとき何通りあるか。

(1-3)　n が偶数のとき何通りあるか。

(1-4)　n が奇数のとき何通りあるか。

(2)　p は自然数とする $(p<n)$。n 枚のカードから p と $p+1$ が記された計 2 枚のカードを抜き出した。残ったカードに記された自然数を全て合計すると 2023 となった。このときの自然数 p と n とを求めよ。

解答

(1)　以下，選ぶ 2 枚のカードに記された数字を $(a,\ b)$ で表す（$a<b$)。

(1-1)　$n=8$ のとき，選ぶ 2 枚のカードに記された数字の和が 9 より小さい (= 8 以下) となる場合は

$$\begin{aligned}&(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7)\\&(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)\\&(3,\ 4),\ (3,\ 5)\end{aligned}$$

であるから，下の行から組数を数えて

$$2+4+6=\mathbf{12}\text{ 通り}$$

(1-2)　$n=9$ のとき，選ぶ 2 枚のカードに記された数字の和が 10 より小さい (= 9 以下) となる場合は

$$\begin{aligned}&(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (1,\ 8)\\&(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7)\\&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6)\\&(4,\ 5)\end{aligned}$$

であるから，下の行から組数を数えて

$$1+3+5+7=\mathbf{16}\text{ 通り}$$

(1-3)　n が偶数のとき，2 枚のカードに記された数字の和が $n+1$ より小さい (= n 以下) 場合は

$$\begin{aligned}&(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (1,\ n-1)\\&(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (2,\ n-2)\\&\qquad\vdots\\&\left(\frac{n-2}{2},\ \frac{n}{2}\right),\ \left(\frac{n-2}{2},\ \frac{n+2}{2}\right)\end{aligned}$$

であるから，下の行から組数を数えて

$$\begin{aligned}
&2+4+6+\cdots+(n-2)\\
&=\frac{\{2+(n-2)\}\cdot\frac{n-2}{2}}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{n(n-2)}{4}}\text{通り}
\end{aligned}$$

(1-4)　n が奇数のとき，2 枚のカードに記された数字の和が $n+1$ より小さい ($=n$ 以下) 場合は

$$\begin{aligned}
&(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (1,\ n-1)\\
&(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (2,\ n-2)\\
&\qquad\vdots\\
&\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

であるから，下の行から組数を数えて

$$\begin{aligned}
&1+3+5+\cdots+(n-2)\\
&=\frac{\{1+(n-2)\}\cdot\frac{n-1}{2}}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{(n-1)^2}{4}}\text{通り}
\end{aligned}$$

注釈

(1-3)(1-4) を先に求め，$n=8$，$n=9$ とすれば (1-1)(1-2) が求まる。

(2)　残ったカードの数字の合計が 2023 であるから

$$\begin{aligned}
&(1+2+3+\cdots+n)-p-(p+1)=2023\\
&\frac{1}{2}n(n+1)-2p-1=2023\\
&\therefore p=\frac{1}{4}\{n(n+1)-4048\}\ \cdots\cdots①
\end{aligned}$$

さらに，$0<p<n$ であるから

$$\begin{aligned}
&0<\frac{1}{4}\{n(n+1)-4048\}<n\\
&0<n(n+1)-4048<4n\\
&n(n+1)>4048\text{ かつ }(n-3)n<4048
\end{aligned}$$

$$\therefore\ 63<n<66 \qquad \left(\because\ \begin{array}{l}63\times64=4032,\ 64\times65=4160\\ 62\times65=4030,\ 63\times66=4158\end{array}\right)$$

これをみたす n は $n=64,\ 65$ のみである。

①に代入して，p が整数となるのは $n=64$ のときの $p=28$ のみである。

以上より，$\boldsymbol{n=64,\ p=28}$

講評

$\boxed{1}$［複素数平面］(標準) $\dfrac{2\pi}{5}$ の値に関する出題であった。$\sin\dfrac{2\pi}{5}$ などの値を覚えている受験生はかなり有利になっただろう。複素数平面からの出題であるが，ほとんど三角関数，双曲線の漸近線に関する計算問題であった。計算がやや煩雑ではあるので，要領よく計算を進めたい。

$\boxed{2}$［小問集合］（やや易）(1) 実数の存在条件，(2) 指数に関する不等式，(3) ベクトルの絶対値の範囲，(4) 対数の大小関係に関する出題であった。(3) は今年度の帝京大学 1 日目でも出題されている。(4) も相加平均と相乗平均の関係性に気付けばそれほど難しくない。また，例えば $a=2,\ b=8$ など具体的に決めても素早く解ける。

$\boxed{3}$［2 次関数，数Ⅲ積分法］（標準）座標平面上における 2 次関数の決定，線分の距離，斜め回転体の体積に関する出題であった。(3)(4) は比を利用して計算量を減らしたい。(5) は (3)(4) の誘導に乗ってもよいが，公式を用いてもよいだろう。

$\boxed{4}$［場合の数，整数の性質］（標準）n 枚のカードから 2 枚取り出す事象に関する場合の数，整数の方程式に関する出題であった。(1) は地道に数えても格子点に帰着しても計算もさほど大変ではないので，少しでも多く得点したい。

全体的に昨年並み程度の難易度であった。難解な考え方を要する問題はなく，素早く計算を進められたかの勝負になったであろう。一次突破ボーダーは 60% 程度であろう。