解答速報

昭和大学医学部（Ⅱ期）　数学

2022年 3月5日実施

$\boxed{1}$

座標空間において，O(0, 0, 0)，A(1, −1, −1)，B(2, 0, 2)，C(2, 2, 0) を頂点とする四面体がある。点 O から △ABC が作る平面に向かって垂線 OH を下ろす。線分 AH の延長と線分 BC の交点を P とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

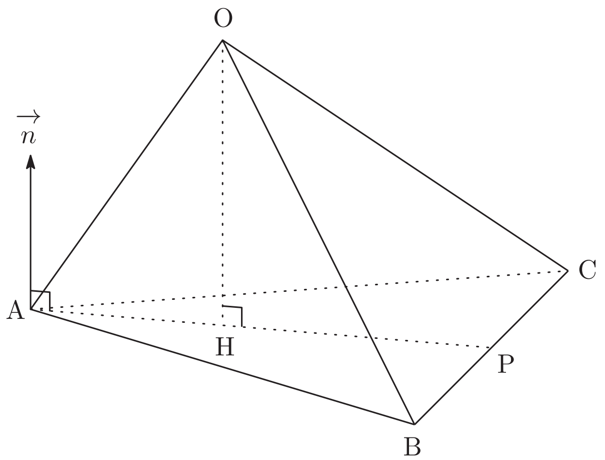
(1)　点 H の座標を求めよ。

(2)　四面体の体積 V を求めよ。

(3)　線分 AH と線分 HP の長さの比 AH:HP を求めよ。

(4)　点 P の座標を求めよ。

解答



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-8,\ 2,\ 2) /\!/ (-4,\ 1,\ 1)$ $(= \vec{n}$ とする)

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\vec{n}$ 上への正射影ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\\ &= -\frac{1}{3}(-4,\ 1,\ 1)\\ &= \left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

よって，H $\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}},\ \boldsymbol{-\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{-\frac{1}{3}}\right)$ である。

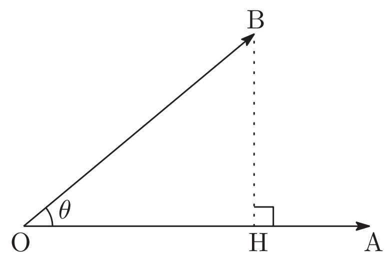
(参考)　正射影ベクトル

下図の 3 点 O，A，B について，点 A から下ろした直線 OB 上に下ろした垂線の足を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への正射影ベクトルと言い，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と書ける。（$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が逆向きのときも成立する。）



なお，次のように証明できる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\\&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\quad(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)\\&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

(別解)　点Hは平面 ABC 上の点であるから，実数 $s,\ t$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1+s+t,\ -1+s+3t,\ -1+3s+t)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$ 平面 ABC より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, かつ$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \text{かつ}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\\iff&11s+7t=3,\ \text{かつ}\ 7s+11t=3\\\iff&s=\frac{1}{6},\ \text{かつ}\ t=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ より $\mathrm{H}\boldsymbol{\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}$ である。

(2)

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{6}|(-2,\ -4,\ 2)\cdot(2,\ 2,\ 0)|=\mathbf{2}$$

(別解)

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}\\&=\frac{1}{18}\sqrt{11\cdot11-7^2}\sqrt{18}=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(3)　点 P は直線 AH 上の点であるので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \left(\frac{k}{3},\ \frac{2k}{3},\ \frac{2k}{3}\right)$$

また点 P は直線 BC 上の点でもあるので，$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = t : 1-t$ (t は実数) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1+2t,\ 3-2t)$$

したがって

$$\frac{k}{3} = 1,\ \text{かつ}\ \frac{2k}{3} = 1+2t,\ \text{かつ}\ \frac{2k}{3} = 3-2t$$
$$\iff k = 3, \text{かつ}\ t = \frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より AH:HP= **1 : 2** である。

(4)　(3) より $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1,\ 2,\ 2)$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 1,\ 1)$ である。よって，P**(2，1，1)** である。

$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ。

(1)　関係式 $2^a = 3$，$3^b = 5$，$6^c = 10$ が与えられたとき，c を a，b を用いて表せ。

(2)　4 種類の数字 0，1，2，3 を用いて表現された自然数を，次のように小さい方から順に並べる。

$$2,\ 10,\ 12,\ 20,\ 22,\ 30,\ 32,\ 100,\ 102,\ 110,\ 112,\ 120,\ 122,\ 130,\ 132,\ 200,\ \cdots$$

次の問いに答えよ。

(a) 第 1489 項目の数値はいくつか。　(b) 2022 が現れるは第何項目か。

(3)　$n = 14^{100}$ とし，n の最高位の数字を a とする。次の各問いに答えよ。なお，必要に応じて下記対数表を用いること。

(a) n の桁数を求めよ。　(b) a の値を求めよ。

(c) $a \times n$ を 15 で割った余りを求めよ。

$\log_{10} 2 = 0.3010$　$\log_{10} 3 = 0.4771$　$\log_{10} 4 = 0.6021$　$\log_{10} 5 = 0.6990$

$\log_{10} 6 = 0.7782$　$\log_{10} 7 = 0.8451$　$\log_{10} 8 = 0.9031$　$\log_{10} 9 = 0.9542$

解答

(1)　条件より，

$$\begin{cases} a = \log_2 3 & \therefore\ \log_2 3 = a \\ b = \log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2 5}{a} & \therefore\ \log_2 5 = ab \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} c = \log_6 10 &= \frac{\log_2 10}{\log_2 6} \\ &= \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3} \\ &= \boldsymbol{\frac{1+ab}{1+a}} \end{aligned}$$

(2)　与えられた数列は，正の偶数の列

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots$$

を 4 進法に直して並べた数列と解釈できる。

(a)　1489 番目の正の偶数は $2 \times 1489 = 2978$ であり，

2978 を 4 進法で表すと，

$$\begin{aligned} 2978 &= 2 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 2 \\ &= 232202_{(4)} \end{aligned}$$

であるから，与えられた数列の第 1489 番目の数は **232202**

(b)　4 進法で 2022 と表される数は，10 進法で表すと

$$2022_{(4)} = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 = 138$$

であり，

138 は 69 番目の正の偶数であるから，

2022 は 第 **69** 項目 である。

(3) (a)
$$\log_{10} n = \log_{10} 14^{100} = 100\log_{10} 14$$
$$= 100(\log_{10} 2 + \log_{10} 7)$$
$$= 100(0.3010 + 0.8451) = 114.61$$

であるから
$$114 < \log_{10} n < 115$$
$$\therefore 10^{114} < n < 10^{115}$$

とわかるので，n は **115** 桁 の数である。

(b)　最高位の数が a なので，
$$a \times 10^{114} \leqq n < (a+1) \times 10^{114}$$
$$\log_{10} a + 114 \leqq \log_{10} n < \log_{10}(a+1) + 114$$
$$\log_{10} a \leqq 114.61 < \log_{10}(a+1) + 114$$
$$\therefore\ \log_{10} a \leqq 0.61 < \log_{10}(a+1)\ \cdots\cdots①$$

となるが，対数表より①を満たす a は $\boldsymbol{a = 4}$ である。

(c)
$$a \times n = 4 \times 14^{100}$$
$$\equiv 4 \times (-1)^{100} \pmod{15} \qquad (\because\ 14 \equiv -1 \pmod{15})$$
$$= 4 \times 1$$
$$= 4$$

であるから，$a \times n$ を 15 で割った余りは **4** である。

$\boxed{3}$

次の各問いに答えよ。ただし, 答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　(1) 次の各定積分の値を求めよ。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

(2)　不等式 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\sin x \leqq y \leqq 1$ をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を x 軸のまわりに回転してえられる立体の体積を V_1，y 軸のまわりに回転してえられる立体の体積を V_2 とする。$V_1,\ V_2$ をそれぞれ求めよ。

解答

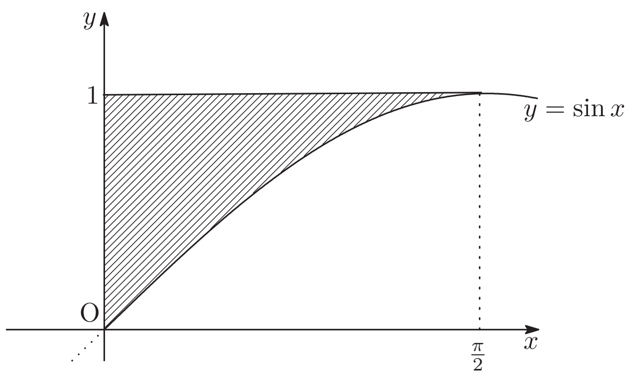
(1)　部分積分を考える。

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)' dx \\
&= -\Big[x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)' dx \\
&= \Big[x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x)' dx \\
&= \Big[x^2 \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4} - 2} \quad \left(\because\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1\right)
\end{aligned}$$

(2)

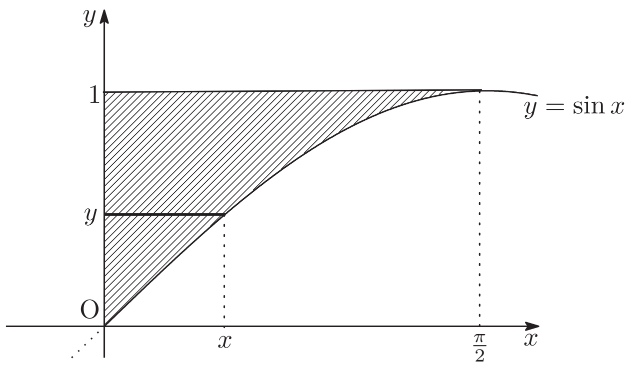


$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1^2 - \sin^2 x\right) dx$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

したがって，$V_1 = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$ である。



$$V_2 = \pi \int_{y=0}^{y=1} x^2 dy$$

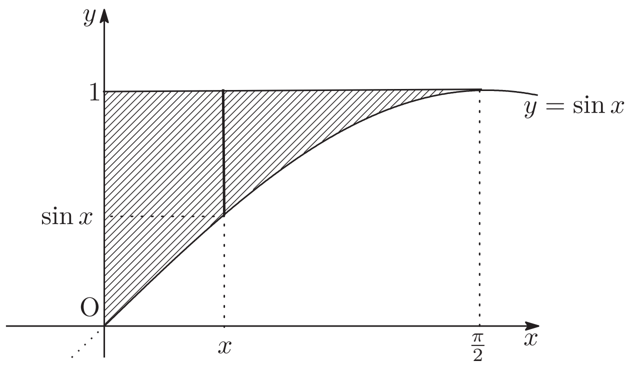
ここで，$y = \sin x$ より $dy = \cos x dx$ であり，x，y の対応関係は次のようになる。

y	$0 \to 1$
x	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって，$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad (\because (1))$

したがって，$V_2 = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{4} - 2\pi}$ である。

(別解)　バウムクーヘン積分



$$V_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x(1-\sin x)dx$$

よって

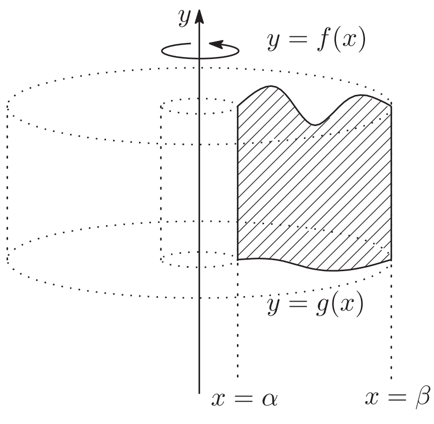
$$\begin{aligned}\frac{V_2}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 1\end{aligned}$$

したがって，$V_2 = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{4} - 2\pi}$ である。

(参考)　バウムクーヘン分割

下図の斜線部分を y 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_y は

$$V_y = \int_\alpha^\beta 2\pi x|f(x) - g(x)|\ dx$$



$\boxed{4}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　1 個のサイコロをくり返し振る試行について，次の問いに答えよ。

サイコロは，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(1-1)　1 の目が 2 回出れば試行を終えることにする。ちょうど 5 回振って試行を終える確率を求めよ。

(1-2)　1 の目が連続して 2 回出れば試行を終えることにする。ちょうど 5 回振って試行を終える確率を求めよ。

(2)　ある工場では，作られる製品のうち p $(0 < p < 1)$ の確率で不良品が発生するという。ある程度たくさんの製品が生産された時点で検査を行い，それに合格すれば一斉に出荷する。検査方法として

A : 4 個抜き出して検査し，不良品が 1 個以下なら合格

B : 7 個抜き出して検査し，不良品が 2 個以下なら合格

という 2 つの方法を考えた。

(2-1)　A，B それぞれにつき，検査で合格する確率を求めよ。

(2-2)　A のほうが合格しやすいのは p の値がどのような範囲のときか。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)(1-1)　1 の目が 2 回出れば試行を終えることにするとき，ちょうど 5 回振って試行を終えるのは，1〜4 回目に 1 の目が 1 回，2〜6 の目が 3 回出て，5 回目に 1 の目が出るときであるから，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{125}{1944}}$$

(1-2)　1 の目が連続して 2 回出れば試行を終えることにするとき，ちょうど 5 回振って試行を終えるのは，1，2 回目に 1 の目が連続して出ることがなく，3 回目に 2〜6 の目が出て，4，5 回目に 1 の目が連続して出るときであるから，求める確率は

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right\} \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{175}{7776}}$$

(2)(2-1)　検査 A で合格するのは，4 個の製品のうち不良品が 0 個または 1 個のときであるから，その確率 $P(A)$ は

$$\begin{aligned} P(A) &= (1-p)^4 + {}_4\mathrm{C}_1 p(1-p)^3 \\ &= (1-p)^3\{(1-p) + 4p\} \\ &= \boldsymbol{(1-p)^3(1+3p)} \end{aligned}$$

また検査 B で合格するのは，7 個の製品のうち不良品が 0 個または 1 個または 2 個のときであるから，その確率 $P(B)$ は

$$\begin{aligned} P(B) &= (1-p)^7 + {}_7\mathrm{C}_1 p(1-p)^6 + {}_7\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^5 \\ &= (1-p)^5\left\{(1-p)^2 + 7p(1-p) + 21p^2\right\} \\ &= \boldsymbol{(1-p)^5(1+5p+15p^2)} \end{aligned}$$

(2-2)　$P(A) > P(B)$ となる p の値の範囲を考える。(2-1) より

$$
\begin{aligned}
P(A) > P(B) &\iff (1-p)^3(1+3p) > (1-p)^5(1+5p+15p^2) \\
&\iff 1+3p > (1-p)^2(1+5p+15p^2) \quad (\because (1-p)^3 > 0) \\
&\iff p^2(15p^2-25p+6) < 0 \\
&\iff 15p^2-25p+6 < 0 \quad (\because p^2 > 0) \\
&\iff \frac{25-\sqrt{265}}{30} < p < \frac{25+\sqrt{265}}{30}
\end{aligned}
$$

よって，$0 < p < 1$ と併せて

$$\boldsymbol{\frac{25-\sqrt{265}}{30} < p < 1}$$

講評

$\boxed{1}$［空間図形］(やや易)

四面体の体積，交点の位置ベクトルからの出題であった。いずれも入試基礎レベルであるので，計算ミスに注意して進めたい。

$\boxed{2}$［小問集合］（標準）

対数の変換，4 進法，桁数・最高位からの出題であった。(2) が見慣れず，ルールを発見するのに戸惑った受験生はいたであろう。他は入試基礎レベルの問題である。

$\boxed{3}$［数Ⅲ積分法］（標準）

部分積分，x 軸・y 軸まわりの回転体に関する問題であった。いずれも入試基礎レベルであるので，計算ミスに注意して進めたい。

$\boxed{4}$［確率］（標準）

確率からの出題であった。特に難しいところはなく，計算ミスに注意して進めたい。

Ⅰ期に引き続き，全体的に易化傾向にある。捻った出題もなく，素直な問題ばかりであるので，高得点勝負になるだろう。一次突破ラインは 65% 程度か。