医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本大学医学部 N方式（Ⅱ期）二次試験　数学

2022年 3月17日実施

[1]

x，y はともに整数であり，1 次方程式 $21x-5y=4$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　整数解 x，y を全て求めなさい．

(2)　$n=x+3y$ とおく．$0 \leqq n \leqq 3000$ の範囲で，$\sqrt{n}$ が整数となるもののうち最大であるものを求め，そのときの n，x，y をそれぞれ求めよ．

解答

(1)

$$21x-5y=4 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$21\cdot 4-5\cdot 16=4 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．① − ② より

$$21(x-4)-5(y-16)=0$$

$$\therefore\ 21(x-4)=5(y-16)$$

が成り立ち，21 と 5 は互いに素であるから

$$\begin{cases} x-4=5k \\ y-16=21k \end{cases} \quad (k\text{ は整数})$$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{x=5k+4} \\ \boldsymbol{y=21k+16} \end{cases} \quad \textbf{(}\boldsymbol{k}\textbf{ は整数)}$$

(2)　(1) より

$$n=x+3y=(5k+4)+3(21k+16)$$
$$=4(17k+13)$$

であり，$\sqrt{n}=2\sqrt{17k+13}$ が整数となるのは

$$17k+13=m^2 \qquad (m\text{ は自然数}) \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす m が存在するときである．

このとき，さらに $0 \leqq n \leqq 3000$ より

$$0 \leqq 4(17k+13) \leqq 3000$$

$$0 \leqq 4m^2 \leqq 3000$$

$$0 \leqq m^2 \leqq 750$$

$$\therefore\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 27$$

であることが必要である．
このうち，大きい順に，①を満たす k が整数なるものを求める．

$$m=27\text{ のとき}\qquad k=\frac{27^2-13}{17}\text{は整数でない}$$

$$m=26\text{ のとき}\qquad k=\frac{26^2-13}{17}=39\text{ となり整数}$$

よって，条件を満たす最大の $\sqrt{n}$ は

$$\sqrt{n}=2\sqrt{26^2}=\mathbf{52}$$

であり，このとき

$$n=52^2=\mathbf{2704}$$

$$x=5\cdot39+4=\mathbf{199}$$

$$y=21\cdot39+16=\mathbf{835}$$

[2]

$y=e^x\cdots$ ①を考える． 原点 O から, この曲線①に引いた接線を ℓ とし, 接点を P とおく．

(1) P の座標を求めなさい．

(2) 点 P を通り ℓ に垂直に交わる直線を m とする． m と x 軸との交点を Q とするとき, 三角形 OPQ の面積を求めなさい．

(3) 曲線①と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

解答

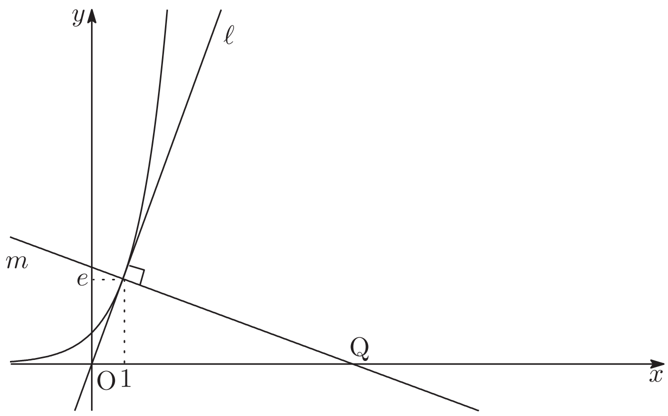
(1) $\mathrm{P}\,(t, e^t)$ とする．$y=e^x$ の導関数は $y'=e^x$ より，ℓ の傾きは e^t と表せるので

$$\ell : y=e^tx-te^t+e^t$$

ℓ は原点を通るので $0=-te^t+e^t \Longleftrightarrow t=1 \quad (\because\ e^t>0)$

ゆえに $\mathrm{P}\boldsymbol{(1,\ e)}$

(2)



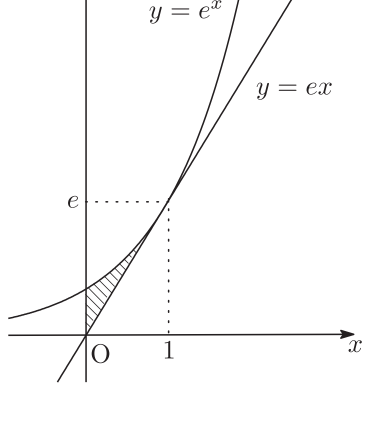
ℓ の傾きは e であることから，m の傾きは $-\dfrac{1}{e}$ である．よって，直線 m の方程式は

$$m : y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e$$

ゆえに，点 Q の座標は $\left(e^2+1,\ 0\right)$

よって，三角形 OPQ の面積は $\left(e^2+1\right)\cdot e\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{e^3+e}{2}}$

(3)



求める面積を S とする．$\ell : y = ex$ であることから

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^1 (e^x - ex)\,dx &= \left[e^x - \frac{e}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= e - \frac{e}{2} - 1 \\
&= \boldsymbol{\frac{e}{2} - 1}
\end{aligned}
$$

[3]

放物線 $y=x^2$ と直線 $\ell : y=x+b$, $(b>0)$ は 2 点 A，B で交わっている．ただし，A の x 座標は負，B の x 座標は正であるとする．線分 AB の中点を M とし，M を通り直線 ℓ に垂直な直線を m とする．直線 m と放物線 $y=x^2$ の交点のうち，x 座標が負である点を C とする．いま，$\mathrm{AB}=r$ とおくとき，$\mathrm{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ が成り立っている．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　M の x 座標を r のみを用いた式で表しなさい．

(2)　C の座標を r のみを用いた式で表しなさい．

(3)　b の値を求めなさい．

解答

(1)　$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$（$\alpha<\beta$）とおくと，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ である．

直線 AB(直線 ℓ) の傾きは 1 であるから

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1\ \cdots\cdots ①$$

$\mathrm{AB}=r$ であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=r$$

$$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{r}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots ②$$

よって

$$\begin{cases}(\mathrm{M}\text{の }x\text{ 座標}) &= \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\\ (\mathrm{M}\text{の }y\text{ 座標}) &= \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}{4}=\dfrac{2+r^2}{8}\end{cases}\qquad (\because\ ①,\ ②)$$

であるから

$$\mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{2}+\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}\right)$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\ \cdots\cdots ③$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{r}{\sqrt{2}}(1,\ 1)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍したベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}(-1,\ 1)=\frac{\sqrt{6}}{4}r(-1,\ 1)$$

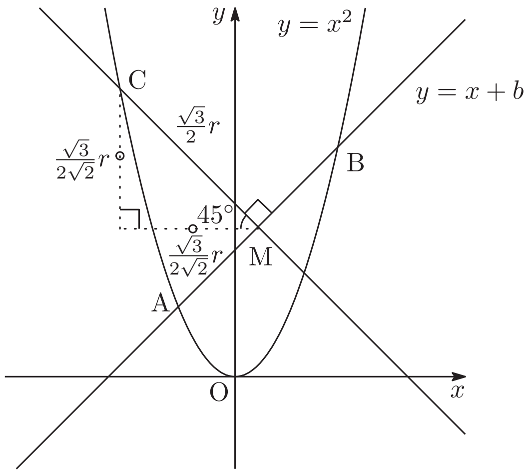
とわかるので，③に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\left(\frac{1}{2},\ \frac{2+r^2}{8}\right)+\frac{\sqrt{6}}{4}r(-1,\ 1)\\ &=\left(\frac{2-\sqrt{6}r}{4},\ \frac{2+2\sqrt{6}r+r^2}{8}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{6}}\boldsymbol{r}}{\mathbf{4}},\ \frac{\mathbf{2}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}\right)$$

(参考)　C の座標は次のような図形的な位置関係を考えて求めてもよい。



(3)　点 C は放物線 $y=x^2$ 上にあるので

$$\frac{2+2\sqrt{6}r+r^2}{8}=\left(\frac{2-\sqrt{6}r}{4}\right)^2$$

$$r^2-2\sqrt{6}=0$$

$$\therefore\ r=2\sqrt{6}$$

このとき，$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},\ \frac{13}{4}\right)$ であり，M は ℓ 上にあるから

$$\frac{13}{4}=\frac{1}{2}+b$$

$$\therefore\ b=\boldsymbol{\frac{11}{4}}$$

講評

［1］［整数の性質］(易)
基本的な一次不定方程式からの出題であった．(2) はしらみつぶしに調べるしかないだろう．

［2］［数 Ⅲ微分法，数 Ⅲ積分法］（易）
基本的な微積分に関する出題であった,．ここでの失点は避けたい問題ばかりで，素早く終わらせて大問 3 に時間を割いていくべきであろう．

［3］［図形と方程式］（標準）
3 つの大問の中で最も骨のある問題で，要領のよい計算が求められる．大問 1，2 を時間をかけずに終えて，大問 3 にしっかりと時間をかけて点数を稼ぎたい．

N1 期と同程度のレベルであった．高得点勝負になると考えられる．N1，N2 期ともに大問 2，3 が関数絡みの出題で，特に大問 3 は図形的な考察を必要とする出題でもあった．正規合格ラインは 60 点満点中 45〜50 点程度か．