解答速報

日本大学医学部 N方式（Ⅱ期）　数学

2022年 3月4日実施

Ⅰ

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{2}\,\boxed{3}}}{\boxed{4}}$ である。

(2)　x の 2 次不等式 $mx^2 + 4x + m - 3 > 0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m のとり得る値の範囲は $m > \boxed{5}$ である。

(3)　i を虚数単位とする。$x = \dfrac{1-2i}{1+2i}$ のとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\boxed{6}\,\boxed{7}\,\boxed{8}}{\boxed{9}\,\boxed{10}}$ である。

(4)　1 つのさいころを 3 回続けて投げる。3 回の出た目の最大値が 3 であったときという条件のもとで，3 回の出た目がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}\,\boxed{13}}$ である。

(5)　中心が直線 $y = 2x - 3$ 上にあり，x 軸と y 軸の両方に接する円のうち，半径が最大の円の方程式は $x^2 + y^2 - \boxed{14}\,x - \boxed{15}\,y + \boxed{16}$ である。

解答

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ より

$$\cos\theta = \frac{1}{3} - \sin\theta$$

であるから，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して

$$\sin^2\theta + \left(\frac{1}{3} - \sin\theta\right)^2 = 1$$

$$2\sin^2\theta - \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{8}{9} = 0$$

$$9\sin^2\theta - 3\sin\theta - 4 = 0$$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから

$$\sin\theta = \boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{17}}{6}}$$

(2)　$m \fallingdotseq 0$ のとき，2 次方程式 $mx^2 + 4x + m - 3 = 0$ の判別式を D とする。
不等式 $mx^2 + 4x + m - 3 > 0$ の解がすべての実数となるための条件は

$m > 0$ かつ $D < 0$

$m > 0$ かつ $\dfrac{D}{4} = 2^2 - m(m-3) < 0$

$m > 0$ かつ $m^2 - 3m - 4 > 0$

$m > 0$ かつ $(m+1)(m-4) > 0$

$m > 0$ かつ「$m < -1$ または $4 < m$」

$\therefore \boldsymbol{m > 4}$

(3)　まず，$x + \dfrac{1}{x}$ を求めると

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \frac{1-2i}{1+2i} + \frac{1+2i}{1-2i} \\ &= \frac{(1-2i)^2 + (1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{(-3-4i) + (-3+4i)}{5} = -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ &= \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 2 \\ &= \boldsymbol{\frac{-14}{25}} \end{aligned}$$

(4)　1 つのさいころを 3 回続けて投げたときに

「出た目の最大値が 3 である」という事象を A

「3 回の出た目がすべて異なる」という事象を B

とすると，求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である。

ここで，

$$\begin{aligned} P(A) &= P(3\text{ 回とも }3\text{ 以下の目が出る}) - P(3\text{ 回とも }2\text{ 以下の目が出る}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{19}{216} \end{aligned}$$

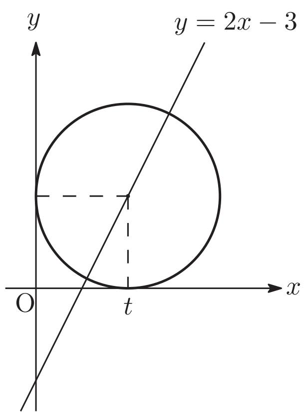
であり，

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{216}$$

であるから，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{216}}{\frac{19}{216}} = \boldsymbol{\frac{6}{19}}$$

(5)



円の中心は直線 $y=2x-3$ 上にあるので $(t,\ 2t-3)$ とおける。
また，円の半径 r は x 軸，y 軸に接するから $r=|t|=|2t-3|$ $\cdots$① が成り立つ。
よって，求める円の方程式は

$$(x-t)^2+\{y-(2t-3)\}^2=t^2 \ \cdots ②$$

とおける。
①の両辺は正であるから，2 乗しても同値であり

$$|t|^2=|2t-3|^2$$

$$t^2=4t^2-12t+9$$

$$t^2-4t+3=0$$

$$(t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1,\ 3$$

であるから，条件を満たす円のうち半径が最大のものは $t=3$ のときの

$$(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$$

$$\therefore \boldsymbol{x^2+y^2-6x-6y+9=0}$$

Ⅱ

$f(x) = 2^{2x-1} - 5 \cdot 2^{x-2}$ とする。

(1) $f(\log_4 5) = \dfrac{\boxed{17}\ \boxed{18} - \boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}}$ である。

(2) x の方程式 $f(x) = k$ が正の解と負の解をもつとき，定数 k のとり得る値の範囲は

$\dfrac{\boxed{22}\ \boxed{23}}{\boxed{24}} < k < \boxed{25}$ である。

解答

(1)

$$\begin{aligned} f(\log_4 5) &= 2^{-1} \cdot 2^{2\log_4 5} - 5 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{\log_4 5} \\ &= 2^{-1} \cdot 4^{\log_4 5} - 5 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}\log_2 5} \\ &= 2^{-1} \cdot 4^{\log_4 5} - 5 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{\log_2 \sqrt{5}} \\ &= 2^{-1} \cdot 5 - 5 \cdot 2^{-2} \cdot \sqrt{5} \\ &= \boldsymbol{\frac{10 - 5\sqrt{5}}{4}} \end{aligned}$$

(2) $2^x = X$ とおくと，$f(x) = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{5}{4}X$ $(= g(X)$ とおく$)$ である。x と X は 1 対 1 に対応し，かつ $x < 0,\ 0 < x \iff 0 < X < 1,\ 1 < X$ であるから，$f(x) = k$ が $x < 0,\ 0 < x$ をみたす解を 1 つずつもつことは，$g(X) = k$ が $0 < X < 1,\ 1 < X$ をみたす解を 1 つずつもつことと同値である。ここで，

$$g(X) = k \iff 2X^2 - 5X - 4k = 0$$

である。したがって，$2X^2 - 5X - 4k = h(X)$ とおくと，求める必要十分条件は

$$h(0) > 0,\ \text{かつ}\ h(1) < 0 \iff \boldsymbol{\frac{-3}{4} < k < 0}$$

である。

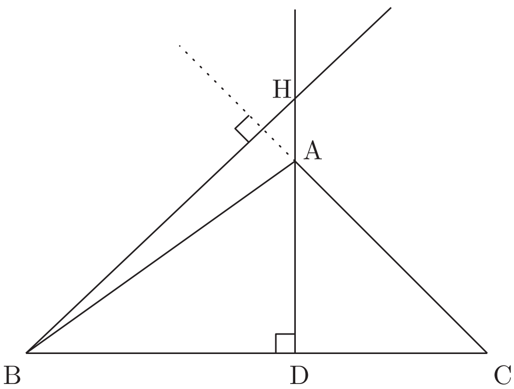
III

△ABC において，AB= 3，AC= 2，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -1$ とする。

(1)　A から直線 BC に下ろした垂線を AD とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

(2)　△ABC の垂心を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{\boxed{30}\ \boxed{31}}{\boxed{32}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{33}\ \boxed{34}}{\boxed{35}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

解答



(1)　BD : DC $= t : 1-t$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 &\iff \{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}\cdot\{\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = 0 \\ &\iff (1-t)\cdot(-1) - (1-t)\cdot 3^2 + t\cdot 2^2 - t\cdot(-1) = 0 \\ &\iff t = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ である。

(2)　点 H は直線 AD 上に存在するので，k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおける。$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 &\iff (\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \\ &\iff \left\{\left(\frac{k}{3} - 1\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \\ &\iff \left(\frac{k}{3} - 1\right)\cdot(-1) + \frac{2k}{3}\cdot 2^2 = 0 \\ &\iff k = -\frac{3}{7}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\dfrac{-1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{-2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ である。

IV

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2,\ a_2=6,\ a_3=12$ を満たし，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{36}\,n+\boxed{37}$ である。

(2)　$a_{22}=\boxed{38}\boxed{39}\boxed{40}$ である。

(3)　数列 $\{c_n\}$ を

$$c_1=b_1,\ c_{n+1}=c_n+\frac{1}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\dfrac{\boxed{41}\,n-\boxed{42}}{n}$ である。

解答

(1)　$b_1=a_2-a_1=4,\ b_2=a_3-a_2=6$ より，$\{b_n\}$ は初項 4，公差 2 の等差数列であるから

$$\begin{aligned}b_n&=4+(n-1)\cdot 2\\&=\boldsymbol{2n+2}\end{aligned}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\&=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)\\&=2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)\\&=n(n+1)\end{aligned}$$

（$n=1$ とすると，$1\cdot(1+1)=2=a_1$ より，このときも成立する。よって，$a_n=n(n+1)$ であるから,）$a_{22}=22\cdot 23=\mathbf{506}$ である。

(3)　数列 $\{c_n\}$ の階差数列が $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき，$c_1=b_1=4$ に注意して

$$\begin{aligned}c_n&=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k}\\&=4+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\\&=4+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=4+\left(1-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{5n-1}{n}\end{aligned}$$

$n=1$ とすると，$\dfrac{5\cdot 1-1}{1}=4=c_1$ より，このときも成立する。

よって，$c_n = \boldsymbol{\dfrac{5n-1}{n}}$ である。

V

$x>0$ で定義された関数 $f(x)=(\log x)^2$ について，次の問いに答えなさい。ただし，log は自然対数，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ は $x=\boxed{43}$ のとき極小値 $\boxed{44}$ をとる。また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標は $\boxed{45}$ である。

(2)　原点 $(0,\ 0)$ から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線のうち傾きが正のものを l とする。l と $y=f(x)$ の接点の座標は $\left(e^{\boxed{46}},\ \boxed{47}\right)$ である。

(3)　直線 $x=e^{\boxed{46}}$ と $y=f(x)$ および x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{48}e^{\boxed{49}}-\boxed{50}$ である。

解答

(1)

$$f'(x)=\frac{2\log x}{x}$$
$$f''(x)=\frac{2(1-\log x)}{x^2}$$

したがって，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	0	↗	1	↗

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$$

よって，$f(x)$ は $x=\mathbf{1}$ のとき極小値 $\mathbf{0}$ をとる。また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標は $\mathbf{1}$ である。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))\ (t>0)$ における接線 l の方程式は

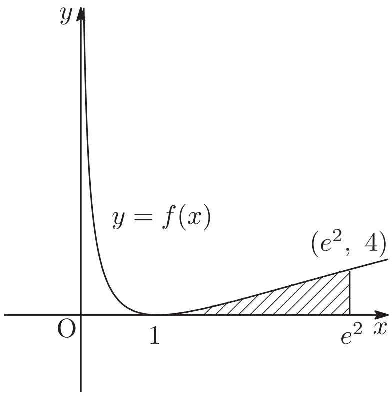
$$\begin{aligned} y&=f'(t)(x-t)+f(t)\\ &=\frac{2\log t}{t}x-2\log t+(\log t)^2 \end{aligned}$$

これが原点 $(0,\ 0)$ を通るとき

$$-2\log t+(\log t)^2=0 \iff \log t=0,\ 2 \iff t=1,\ e^2$$

$f'(1)=0,\ f'(e^2)=\dfrac{4}{e^2}(>0)$ より，求める接点の座標は $(\boldsymbol{e^2},\ \mathbf{4})$ である。

(3)　求める面積は下図の斜線部分の面積である。



よって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} f(x)dx &= \int_1^{e^2} (\log x)^2 dx \\ &= \Big[x(\log x)^2\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 4e^2 - 2\left\{\Big[x\log x\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx\right\} \\ &= 4e^2 - 2(e^2+1) \\ &= \boldsymbol{2e^2 - 2}\end{aligned}$$

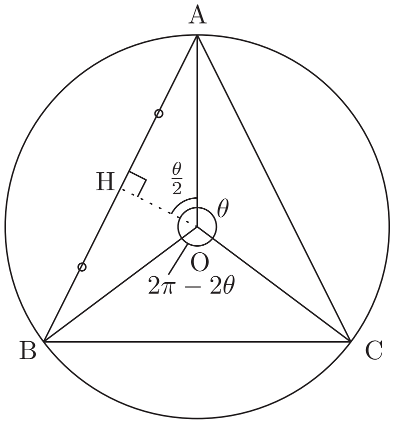
VI

中心が O で半径が 1 の円に，AB=AC の二等辺三角形 ABC が内接している。$\angle$AOB= θ $(0 < \theta < \pi)$ とし，$\triangle$ABC の面積を $S(\theta)$ とする。

(1) $\angle \mathrm{OAB}= \dfrac{\pi-\theta}{\boxed{51}}$，AB=AC= $\boxed{52}\sin\dfrac{\theta}{\boxed{53}}$ である。

(2) $S(\theta)=\boxed{54}\sin\theta\sin^{\boxed{55}}\dfrac{\theta}{\boxed{53}}$ であり，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{\boxed{56}}{\boxed{57}}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\boxed{58}$ である。

解答



(1) $\triangle$OAB は OA=OB の二等辺三角形であるから，$\angle$AOB= θ より，$\angle \mathrm{OAB}= \boldsymbol{\dfrac{\pi-\theta}{2}}$ である。

また，点 O から AB に下ろした垂線の足を H とすると，$\angle \mathrm{AOH}=\dfrac{\theta}{2}$ より，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2\mathrm{AH}=\boldsymbol{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$ である。

(2)

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}^2\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi-\theta}{2}\right)\\
&= \boldsymbol{2\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3} &= 2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}\\
&= 2\cdot 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)} &= \frac{2\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{4}} \\
&= \frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{4}} \\
&= \frac{\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{16}} \\
&= \frac{1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}}{1^2\cdot\frac{1}{16}} \\
&= \mathbf{8}
\end{aligned}$$

講評

Ⅰ［小問集合］(易)

計 5 題で，(1) 三角比，(2)2 次不等式，(3) 式の値，(4) さいころの目の最大値に関する確率，(5) 図形と方程式からの出題であった。Ⅰ 期よりも難易度は下がったように感じる。どの問題も落とせない。

Ⅱ [指数対数関数]（易）

対数の性質に関する基本問題。(2) の 2 次方程式との融合問題では，x の正負と 2^x の数値の関係をしっかりと考える必要があるが，そこだけクリアすれば計算量もほとんどなく解ける。確実に正解したい。

Ⅲ［平面ベクトル］（易）

三角形の垂心の位置ベクトルを求める問題。素直に内積を使って計算を進めたい。

Ⅳ［数列・漸化式］（易）

階差数列と漸化式に関する基本問題。すべて正解したい。

Ⅴ［数 Ⅲ 微分法，数 Ⅲ 積分法］（標準）

数 Ⅲ 微積分の基本問題。$(\log x)^2$ の積分計算ができるかどうかがポイントであった。

Ⅵ［極限］（標準）

三角関数の極限に関する基本問題。$S(\theta)$ を求めることができれば，あとは基本的な極限の計算になる。最後の問題ではあるが，確実に正解したい。

Ⅰ 期と比較すると，全体として難易度は下がったように感じる。計算量も少なくなっており，高得点勝負になると考えられる。Ⅱ期の定員数も考えると，一次突破ラインは 80 %程度か。