

日本大学医学部 N方式(I期) 数学

2022年 2月1日実施

I

- (1) a を 0 でない実数の定数とする。2 次方程式 $a^2x^2 - 3ax + 2a - 2 = 0$ が $x < 0$ と $1 < x$ の範囲に実数解を 1 つずつもつような定数 a のとり得る値の範囲は $< a <$ または $< a <$ である。
- (2) $AB = 5$, $AC = 7$, $\angle BAC = 120^\circ$ である三角形 ABC において、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さは $\frac{\text{}}{\text{}}$ $\frac{\text{}}{\text{}}$ である。
- (3) ある布は、1 枚で通過する光の量を 60% 減らすことができる。通過する光の量を 1% 以下にするためには、この布を 枚以上重ねれば良い。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
- (4) x^{50} を $x^3 - 1$ で割ったときの余りを $ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数の定数) と表すとき、 $a = \text{}$, $b = \text{}$, $c = \text{}$ である。
- (5) 平均値が 3、分散が 2 であるデータの数値に対して、それぞれを 2 倍して 1 を加えて新しいデータを作る。このとき、新しいデータの平均値は 7、分散は となる。ただし、分散が小数になる場合には、小数第 1 位の数を四捨五入して整数で答えよ。

解答

- (1) $f(x) = a^2x^2 - 3ax + 2a - 2$ とする。条件は、 $a \neq 0$ の下で

$$f(0) < 0 \text{ かつ } f(1) < 0$$

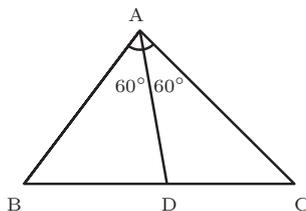
$$\Leftrightarrow 2a - 2 < 0 \text{ かつ } a^2 - a - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow a < 1 \text{ かつ } -1 < a < 2$$

よって、求める範囲は

$$-1 < a < 0 \text{ または } 0 < a < 1$$

- (2)



三角形の面積に着目して

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ$$

$$35 = 12AD$$

$$\therefore AD = \frac{35}{12}$$

(3) n 枚以上重ねたときに、光の通過量が 1% 以下になるとすると

$$\left(\frac{40}{100}\right)^n \leq \frac{1}{100}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{4}{10}\right)^n \leq \log_{10} \frac{1}{100}$$

$$n(2 \log_{10} 2 - 1) \leq -2$$

$$n(1 - 2 \log_{10} 2) \geq 2$$

$$\therefore n \geq \frac{2}{1 - 2 \log_{10} 2} = \frac{2}{1 - 2 \times 0.3010} = 5.025 \dots$$

よって $n \geq 6$ より、**6** 枚以上重ねればよい

(4) x^{50} を $x^3 - 1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$x^{50} = (x^3 - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$\therefore x^{50} = (x - 1)(x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①の両辺に $x = 1$ を代入して

$$1 = a + b + c \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$x = \omega \left(= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \right)$ を代入すると、

$$\omega^{50} = a\omega^2 + b\omega + c$$

$$(\omega^3)^{16} \cdot \omega^2 = a\omega^2 + b\omega + c$$

$$\omega^2 = a\omega^2 + b\omega + c \quad (\because \omega^3 = 1)$$

$$-\omega - 1 = a(-\omega - 1) + b\omega + c$$

$$\therefore -\omega - 1 = (b - a)\omega + c - a \quad (\because \omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

両辺の実部、虚部を比較して

$$b - a = -1, c - a = -1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③より、 **$a = 1, b = 0, c = 0$**

別解

n を自然数として

$$x^{50} = (x^3)^{16} \cdot x^2 \equiv 1^{16} \cdot x^2 = x^2 \pmod{x^3 - 1}$$

(5) 与えられたデータを X とすると、その平均は $E(X) = 3$ 、分散は $V(X) = 2$ である。

また、新しいデータを Y とすると、 $Y = 2X + 1$ と表せるから、その分散について

$$\begin{aligned}V(Y) &= V(2X + 1) \\ &= 2^2V(X) \\ &= 8\end{aligned}$$

II

1 から 4 の数字が 1 つずつ書かれた合計 4 個の球 (4 個の球の数字はすべて異なる) が入った袋から、1 個の球を取り出し、書かれた数字を記録して袋に戻す操作を 4 回繰り返す。このとき、記録した数字の最大値を M 、最小値を m とする。ただし、球を取り出す確率はどれも同様に確からしいとする。

(1) $M - m = 0$ となる確率は $\frac{\boxed{14}}{\boxed{15} \ \boxed{16}}$ である。

(2) $M - m = 1$ となる確率は $\frac{\boxed{17} \ \boxed{18}}{\boxed{19} \ \boxed{20} \ \boxed{21}}$ である。

解答

(1) $M - m = 0$, すなわち $M = m$ となるのは、
取り出した球の数字がすべて一致するときであるから、

$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{4^4} = \frac{1}{64}$$

(2) $M - m = 1$ となるのは、
 $(M, m) = (4, 3), (3, 2), (2, 1)$ の場合がある。

$(M, m) = (4, 3)$ となる場合は、

4 回とも 3 または 4 の球が出る場合から、4 回とも 3 が出る場合と 4 回とも 4 が出る場合を除いて
ことから、 $2^4 - 2$ 通りある。

$(M, m) = (3, 2), (2, 1)$ の場合も、それぞれ $2^4 - 2$ 通りずつある。

よって、求める確率は

$$\frac{3(2^4 - 2)}{4^4} = \frac{21}{128}$$

III

AB=4, BC= $\sqrt{19}$, CA=3である△ABCにおいて, $\angle BAC=\theta$ とする。

(1) $\cos \theta = \frac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$ であり, $\cos 2\theta = \frac{\boxed{24}}{\boxed{26}} \frac{\boxed{25}}{\boxed{26}}$ である。

(2) $\cos 4\theta = \boxed{27} \cos^4 \theta - \boxed{28} \cos^2 \theta + \boxed{29}$ であるから, $\cos 4\theta = \frac{\boxed{30}}{\boxed{32}} \frac{\boxed{31}}{\boxed{33}}$ である。

解答

(1) 余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 3^2 - (\sqrt{19})^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$$

また, 倍角公式を用いて

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 - 1 = \frac{-7}{8}$$

(2) $\cos 4\theta = \cos 2 \cdot 2\theta$ より, 倍角公式を用いて

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 2 \cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

よって

$$\cos 4\theta = 8 \left(\frac{1}{4} \right)^4 - 8 \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 1 = \frac{17}{32}$$

IV

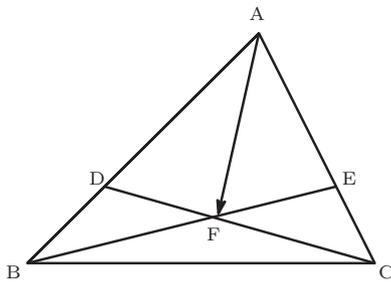
面積が1の三角形ABCにおいて、辺AB, ACを2:1に内分する点をそれぞれD, Eとし、線分BEと線分CDの交点をFとする。 $\vec{AP} = p\vec{AB}$, $\vec{AQ} = q\vec{AC}$ (p, q は正の実数)を満たす2点P, Qがあり、直線PQが点Fを通っている。

(1) $\vec{AF} = \frac{\boxed{34}\vec{AB} + \boxed{35}\vec{AC}}{\boxed{36}}$ である。

(2) 点Fが三角形ABCの外心と一致するとき、 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{\boxed{37}}{\boxed{38}} |\vec{AB}|^2$ が成り立つ。

(3) p, q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}$ を満たす。また、三角形APQの面積の最小値は $\frac{\boxed{41}}{\boxed{43}} \frac{\boxed{42}}{\boxed{44}}$ である。

解答



(1) メネラウスの定理より

$$\frac{DA}{BD} \cdot \frac{CE}{AC} \cdot \frac{FB}{EF} = 1$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{FB}{EF} = 1$$

$$\therefore \frac{FB}{EF} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore BF : FE = 3 : 2$$

よって、

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AE} \\ &= \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\vec{AC} \\ &= \frac{\mathbf{2}\vec{AB} + \mathbf{2}\vec{AC}}{\mathbf{5}} \end{aligned}$$

(2) ABの中点をMとする。Fが△ABCの外心と一致するとき

$\vec{FM} \perp \vec{AB}$ であるから

$$\vec{FM} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$(\vec{AM} - \vec{AF}) \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{AB} = \vec{AM} \cdot \vec{AB}$$

$$\left(\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC} \right) \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AB}$$

$$\frac{2}{5} |\vec{AB}|^2 + \frac{2}{5} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2$$

(3) (1) と条件により,

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{2}{5} \vec{AB} + \frac{2}{5} \vec{AC} \\ &= \frac{2}{5p} \vec{AP} + \frac{2}{5q} \vec{AQ} \end{aligned}$$

であり,

P, F, Q が同一直線上にあるから

$$\begin{aligned} \frac{2}{5p} + \frac{2}{5q} &= 1 \\ \therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{5}{2} \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また,

$$\triangle APQ = pq \triangle ABC = pq$$

の最小値を求めるには, ①と, 相加平均・相乗平均の関係の不等式より

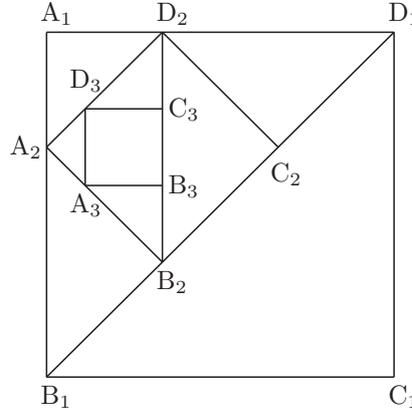
$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} \\ \frac{5}{2} &\geq \frac{2}{\sqrt{pq}} \\ pq &\geq \frac{16}{25} \end{aligned}$$

が成り立ち, 等号は $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{5}{4}$, すなわち $p = q = \frac{4}{5}$ の時に成立する。

よって, $\triangle APQ$ の面積の最小値は $\frac{16}{25}$

V

1 辺の長さが 1 の正方形 $A_1B_1C_1D_1$ の辺 A_1B_1 上に点 A_2 を, 対角線 B_1D_1 上に 2 点 B_2, C_2 を, 辺 A_1D_1 上に点 D_2 をとって, 正方形 $A_2B_2C_2D_2$ を作る。次に正方形 $A_2B_2C_2D_2$ の辺 A_2B_2 上に点 A_3 を, 対角線 B_2D_2 上に 2 点 B_3, C_3 を, 辺 A_2D_2 上に点 D_3 をとって, 正方形 $A_3B_3C_3D_3$ を作る。以下同様に繰り返して, 正方形 $A_nB_nC_nD_n$ を作る。正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の面積を S_n とし, 三角形 $A_nA_{n+1}D_{n+1}$ の内接円の半径を r_n とする。



(1) $S_2 = \frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$ である。

(2) $\sum_{k=1}^n S_k = \frac{\boxed{47}}{\boxed{48}} \left\{ 1 - \left(\frac{\boxed{49}}{\boxed{50}} \right)^n \right\}$ である。

(3) $r_1 = \frac{\boxed{51} - \sqrt{\boxed{52}}}{\boxed{53}}$ であり, $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \frac{\boxed{54} - \sqrt{\boxed{55}}}{\boxed{56} \boxed{57}}$ である。

解答

正方形 $A_nB_nC_nD_n$ の 1 辺の長さを a_n とする。 ($a_1 = 1$)

(1) 三角形 $A_1A_2D_2$, 三角形 $B_2A_2B_1$ はともに直角二等辺三角形であるので

$$A_1A_2 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}, A_2B_1 = \sqrt{2}a_2$$

$A_1A_2 + A_2B_1 = A_1B_1$ より

$$\frac{a_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}a_2 = 1 \iff a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

したがって

$$S_2 = a_2^2 = \frac{2}{9}$$

(2) 正方形 $A_nB_nC_nD_n$ と正方形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ について, (1) と同様に考えると

$$\frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}a_{n+1} = a_n \iff a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3}a_n$$

したがって, $S_{n+1} = a_{n+1}^2 = \frac{2}{9}a_n^2 = \frac{2}{9}S_n$ であるから, $\sum_{k=1}^n S_k$ は初項 $S_1 = 1$, 公比 $\frac{2}{9}$, 項数 n の等比数列の和である。よって

$$\sum_{k=1}^n S_k = \frac{\frac{2}{9}\{1 - (\frac{2}{9})^n\}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{9}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{9} \right)^n \right\}$$

(3) (三角形 $A_1A_2D_2$ の面積) $= \frac{r_1}{2}(A_1A_2 + A_2D_2 + D_2A_1)$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{r_1}{2} \left(\frac{a_2}{\sqrt{2}} + a_2 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \right) \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{2 - \sqrt{2}}{6} \quad \left(\because a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \end{aligned}$$

(三角形 $A_nA_{n+1}D_{n+1}$ の面積) $= \frac{r_n}{2}(A_nA_{n+1} + A_{n+1}D_{n+1} + D_{n+1}A_n)$ より, 同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{r_n}{2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{2}} + a_n + \frac{a_n}{\sqrt{2}} \right) \\ \Leftrightarrow r_n &= \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{9} a_n \quad \left(\because a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} a_n, a_n \neq 0 \right) \end{aligned}$$

ここで, (1) より, $a_n = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n-1}$ であるので

$$r_n = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{9} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n-1}$$

したがって, $\sum_{k=1}^{\infty} r_n$ は初項 r_1 , 公比 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ の無限等比級数であるから, $-1 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} r_n &= \frac{r_1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}} \\ &= \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{6}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{14} \end{aligned}$$

(参考) (3) の r_n の公比が a_n のそれと等しいのは明らかであるから, 無限等比級数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_n$ の公比 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ はすぐにかかる。

VI

関数 $f(x) = x \log(x+1)$ について、曲線 $y = f(x)$ を C とする。また、曲線 C と直線 $y = x$ との交点のうち、原点と異なる点の x 座標を a とする。

ただし、 \log は自然対数、 e は自然対数の底を表す。

(1) $f'(x) = \log(x+1) - \frac{\boxed{58}}{x+1} + \boxed{59}$ であり、 $f''(x) = \frac{x + \boxed{60}}{(x+1)^2}$ である。

(2) $a = e - \boxed{61}$ である。また、 $f(x)$ は $x = \boxed{62}$ において最小値 $\boxed{63}$ をとる。曲線 C 、直線 $x = a$ 、および x 軸で囲まれた図形の面積は、 $\frac{\boxed{64}}{\boxed{65}}e^2 - \frac{\boxed{66}}{\boxed{67}}$ である。

解答

真数条件より、 $x+1 > 0 \iff x > -1$

(1) $f(x) = x \log(x+1)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \log(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= \log(x+1) + \frac{(x+1) - 1}{x+1} \\ &= \log(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) $y = f(x)$ と $y = x$ を連立して

$$x \log(x+1) = x \iff x \{\log(x+1) - 1\} \iff x = 0, \text{ または } \log(x+1) = 1 \iff x = 0, e - 1$$

$a \neq 0$ より、 $a = e - 1$

また、(1) より $f'(0) = 0$ であり、 $f''(x) > 0$ ($\because x > -1$) であるから、 $f(x)$ は $x = 0$ において極小値 0 をとる。

さらに、 $-1 < x < 0$ 、 $0 < x$ のとき $f(x) > 0$ である。

よって、 $f(x)$ は $x = 0$ において最小値 0 をとる。

いま、 $f(x) \geq 0$ であるから、曲線 C 、直線 $x = e - 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e-1} x \log(x+1) dx \\ &= \int_0^{e-1} \{(x+1) \log(x+1) - \log(x+1)\} dx \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int (x+1) \log(x+1) dx &= \frac{(x+1)^2}{2} \cdot \log(x+1) - \int \frac{(x+1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} \cdot \log(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4} + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log(x+1) dx &= (x+1) \log(x+1) - \int (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= (x+1) \log(x+1) - x + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} (x+1) \log(x+1) dx &= \left[\frac{(x+1)^2}{2} \cdot \log(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4} \right]_0^{e-1} \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \log(x+1) dx &= \left[(x+1) \log(x+1) - x \right]_0^{e-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

よって

$$S = \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \right) - 1 = \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4}$$

(参考) S は $\int_0^{e-1} x \log(x+1) dx = \int_0^{e-1} \left(\frac{x^2-1}{2} \right)' \log(x+1) dx$ とみて、部分積分してもよい。

講評

I [小問集合] (易)

計5題で(1)2次方程式の解の配置, (2)内角の二等分線の長さ, (3)常用対数の文章題, (4) ω に関連した整式の割り算, (5)データの分析からの出題であった。それも教科書レベルの問題であるが、時間との勝負と考えると、(2)は面積での評価ができたか、(4)は ω ($\omega^3 = 1$ を満たす)を利用できたか、(5)は変数変換の式 $S_y^2 = a^2 S_x^2$ ($y = ax + b$ と変数変換した場合)を利用できたか、この辺りがスピードに影響を与えたであろう。

II [確率] (易)

教科書レベルの平易な確率の問題である。(2)も (M, m) を3通りの場合を考えるだけでどれも同様の計算となるので、計算量も少なめである。時間をかけずに終えたい。

III [三角関数] (易)

余弦定理と \cos の倍角公式に関する問題で、これも教科書レベルの問題である。II同様に素早く終えたい。

IV [平面ベクトル, 式と証明] (標準)

交点の位置ベクトルに関する問題で、(3)も点Fが満たす条件を丁寧に立式してやればよい。最後は誘導が丁寧なので、相加平均・相乗平均の関係の利用に気付きたい。

V [数列, 極限] (標準)

図形絡みの数列の極限からの出題である。素早く終えるためにはこの手の問題が等比級数になることに注目して S_1, S_2 あたりなどから必要な公比などを素早く求めたい。

VI [数III微分法, 数III積分法] (やや易)

関数 $f(x) = x \log(x+1)$ に関する微積分の入試基礎レベルの問題である。計算ミスに注意したい。

N方式ということもあってか、易しめの出題が多かった。ただし、問題量が多いので詰まった問題があったらすぐに飛ばして次に移るなど手早く解き進められたかが合否を分けることになるだろう。一次突破ラインは70%程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

YMS

heart of medicine

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>

東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

メビオ

☎ 0120-146-156

<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

☎ 0120-192-215

<https://www.mebio-eishinkan.com/>



友だち追加で全科目を閲覧!

LINE 公式アカウント

◀ YMSの友だち登録はこちらから