解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2022年 2月9日実施

1.

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋 A には白玉 2 個，赤玉 1 個，袋 B には白玉 1 個，赤玉 2 個が入っている。この状態から始めて，次の操作を繰り返し行う。

操作

① 袋 A，袋 B から玉を 1 個ずつ取り出す。

② (i) 取り出した 2 個の玉の色が同じである場合は，取り出した玉を 2 個とも袋 A に入れる。

(ii) 取り出した 2 個の玉の色が異なる場合は，袋 A から取り出した玉は袋 B に入れ，袋 B から取り出した玉は袋 A に入れる。

このとき，

- 操作を 2 回繰り返した後に袋 A に入っている赤玉の個数が 1 個である確率は $\boxed{(ア)}$
- 操作を 3 回繰り返した後に袋 A に入っている赤玉の個数が 0 個である確率は $\boxed{(イ)}$

である。

$\boxed{解答}$

袋 A に白玉が x 個，赤玉が y 個入っていて，袋 B に白玉 z 個，赤玉 w 個入っている状況を

$$\begin{array}{cc} & \text{A}\quad\text{B} \\ \begin{array}{c}白\\赤\end{array} & \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}\end{array}$$

と表すことにする。

操作を 2 回繰り返した後に，袋 A に入っている赤玉の個数が 1 個となるのは，次の場合である。

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}]{\text{A 白, B 赤}} \begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}]{\text{A 赤, B 白}} \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \cdots\cdots①$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}]{\text{A 赤, B 白}} \begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix} \xrightarrow[1]{\text{A 白, B 赤}} \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \cdots\cdots②$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}]{\text{A 赤, B 赤}} \begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}]{\text{A 赤, B 白}} \begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix} \cdots\cdots③$$

よって，求める確率は

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times 1+\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{59}{162}}$$

操作を 3 回繰り返した後 A に入っている赤玉の個数が 0 個となるのは，

2 回の操作後に A に入っている赤玉の個数が 1 個であり，
3 回目の操作で A から赤玉を取り出し，B からは白玉を取り出す場合であるから，
上の①，②，③から考えて (③からは不可能)，次の場合である。

$$① \xrightarrow[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}]{\text{A 赤, B 白}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$② \xrightarrow[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}]{\text{A 赤, B 白}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

よって，求める確率は

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times 1\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{25}{729}}$$

2.

実数 a は正の定数とする。実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{|x+a|}{\sqrt{x^2+1}}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $x=-a$ で微分可能であるかどうか調べよ。

(2)　$f(x)$ の最大値が $\sqrt{2}$ となるように，定数 a の値を定めよ。

(3)　定数 a は (2) で定めた値とする。$y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解答

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to -a+0} f(x)=\lim_{x\to -a-0} f(x)=0$ より，$y=f(x)$ は $x=-a$ で連続である。

続いて，微分係数 $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}$ が存在するか調べる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -a+0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}&=\lim_{x\to -a+0}\frac{\frac{|x+a|}{\sqrt{x^2+1}}}{x+a}\\&=\lim_{x\to -a+0}\frac{\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}}{x+a}\\&=\lim_{x\to -a+0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\\lim_{x\to -a-0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}&=\lim_{x\to -a-0}\frac{\frac{|x+a|}{\sqrt{x^2+1}}}{x+a}\\&=\lim_{x\to -a-0}\frac{\frac{-(x+a)}{\sqrt{x^2+1}}}{x+a}\\&=\lim_{x\to -a+0}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to -a+0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}\fallingdotseq\lim_{x\to -a-0}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}$ より，微分係数 $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}$ は存在しない。したがって，$y=f(x)$ は $x=-a$ で 微分可能でない。

(2)　$f(x)$ の絶対値を外すと

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (x>-a)\\ 0 & (x=-a)\\ -\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (x<-a)\end{cases}$$

であり，$x>-a$ のとき $f'(x)=\dfrac{-ax+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$，$x<-a$ のとき $f'(x)=\dfrac{ax-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ となるので，

$a>0$ に注意して $y=f(x)$ の増減は次のようになる。

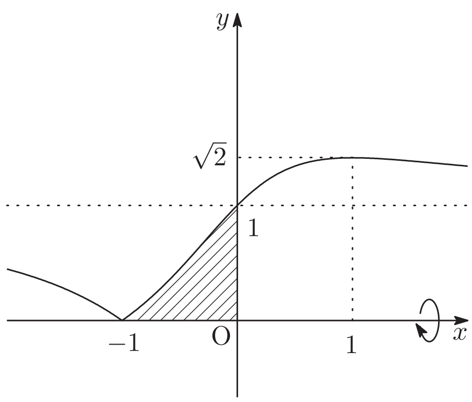
x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗		↘

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=1$

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{a}$ のとき最大となるので

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2} \\
\iff & \frac{1}{a}+a=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+1} \\
\iff & \left(\frac{1}{a}+a\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+1\right) \quad (\because \text{両辺正}) \\
\iff & \left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=0 \\
\iff & a=\mathbf{1} \quad (\because a>0)
\end{aligned}
$$

(3)　(1) より $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lim_{x\to-1-0}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，(2) と併せて $y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになるので，求める立体の体積 V は下図の斜線部分を x 軸まわりに 1 回転してできる立体の体積である。



よって，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{0}\{f(x)\}^2dx \\
&= \int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left\{1+\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right\}dx \\
&= \Big[x+\log(x^2+1)\Big]_{-1}^{0} \\
&= 1-\log 2 \qquad \therefore \quad V=\boldsymbol{\pi(1-\log 2)}
\end{aligned}
$$

3.

m は 3 以上の奇数とし，m のすべての正の約数を $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ と並べる。ただし，$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ とする。以下の 2 つの条件 (ⅰ), (ⅱ) をみたす m について考える。

(ⅰ)　m は素数ではない。

(ⅱ)　$i \leqq j,\ 1 < i < k,\ 1 < j < k$ をみたすすべての整数 $i,\ j$ について，$a_j - a_i \leqq 3$ が成り立つ。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　k は 3 または 4 であることを示し，m を a_2 を用いて表せ。

(2)　$k = 3$ となるとき，すべての正の整数 n について $(a_2 n + 1)^{a_2} - 1$ は m の倍数であることを示せ。

解答

(1)　$k \geqq 5$ とすると，条件 (ⅱ) により $a_2,\ a_4$ について $a_4 - a_2 \leqq 3$ が成立する。しかし，$a_2 < a_3 < a_4$ であり，$a_2,\ a_3,\ a_4$ はすべて奇数である（$\because$ m は 3 以上の奇数）ので，$a_4 - a_2 \geqq 4$ となり，矛盾する。したがって，$k \leqq 4$ である。

ここで，m が 3 以上の奇数であることより $k \fallingdotseq 1$ であり，また，条件 (ⅰ) により $k \fallingdotseq 2$ である。よって，k は 3 または 4 である。　（証明終）

さて，$k = 3$ のとき，m は素数の平方数であるから，m の正の約数 $a_1(=1),\ a_2,\ a_3(=m)$ について，$m = \boldsymbol{a_2{}^2}$ である。

また，$k = 4$ のとき，m は 1 と m 以外の 2 つの素因数の積であるから，m の正の約数 $a_1(=1),\ a_2,\ a_3,\ a_4(=m)$ について，$m = a_2 a_3 = \boldsymbol{a_2(a_2+2)}$ である。

(参考)　m が 3 以上の奇数であることから，条件 (ⅱ) により，「$i \leqq j,\ 1 < i < k,\ 1 < j < k$ をみたすすべての整数 $i,\ j$ について，$a_j = a_i$，または $a_j = a_i + 2$ が成り立つ」ので，前半の証明はこのことを用いて示してもよい。また，後半の $k = 4$ のときの $a_3 = a_2 + 2$ もこのことを用いている。

(2)　(1) より，$m = a_2{}^2$ のときを考える。すなわち，

$$\text{すべての正の整数 } n \text{ について } (a_2 n + 1)^{a_2} - 1 \text{ は } a_2{}^2 \text{の倍数である} \quad \cdots (*)$$

ことを示す。

$m \geqq 3$ より $a_2 \geqq 3$ なので，二項定理を用いて

$$\begin{aligned}(a_2 n + 1)^{a_2} - 1 &= \left\{(a_2 n)^{a_2} + {}_{a_2}\mathrm{C}_1 (a_2 n)^{a_2 - 1} + \cdots + {}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2 - 2}(a_2 n)^2 + {}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2 - 1}(a_2 n)^1 + 1\right\} - 1 \\ &= (a_2 n)^{a_2} + {}_{a_2}\mathrm{C}_1 (a_2 n)^{a_2 - 1} + \cdots + {}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2 - 2}(a_2 n)^2 + {}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2 - 1}(a_2 n)^1 \\ &= (a_2 n)^{a_2} + {}_{a_2}\mathrm{C}_1 (a_2 n)^{a_2 - 1} + \cdots + {}_{a_2}\mathrm{C}_{a_2 - 2}(a_2 n)^2 + (a_2 n)^2\end{aligned}$$

各項は必ず $a_2{}^2$ の因数をもち，また一般的に ${}_s\mathrm{C}_t$ ($s,\ t$ は $s \geqq t \geqq 0$ をみたす整数) が整数であることと併せると，$a_2{}^2$ の倍数となる。　（証明終）

4.

複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$w = z + \dfrac{2}{z}$ で表される点 w の描く図形を C とする。C で囲まれた部分の内部（ただし，境界線を含まない）に定点 α をとり，α を通る直線 ℓ が C と交わる 2 点を β_1，β_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位を表す。

(1)　$w = u + vi$（u，v は実数）とするとき，u と v の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　点 α を固定したまま ℓ を動かすとき，積 $|\beta_1 - \alpha| \cdot |\beta_2 - \alpha|$ が最大となるような ℓ はどのような直線のときか調べよ。

解答

(1)　$|z| = 1$ より，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける。$w = z + \dfrac{2}{z}$ に代入して

$$u + vi = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{2}{\cos\theta + i\sin\theta} \iff u + vi = 3\cos\theta + i(-\sin\theta)$$

u，v，$\cos\theta$，$\sin\theta$ が実数であることより

$$u = 3\cos\theta,\ \text{かつ}\ v = -\sin\theta \iff \cos\theta = \frac{u}{3},\ \text{かつ}\ \sin\theta = -v$$

よって，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入して，u と v の間に成り立つ下記の関係式を得る。

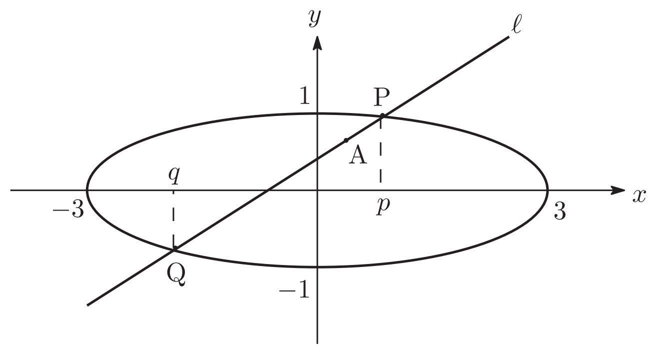
$$\boldsymbol{\frac{u^2}{9} + v^2 = 1}$$

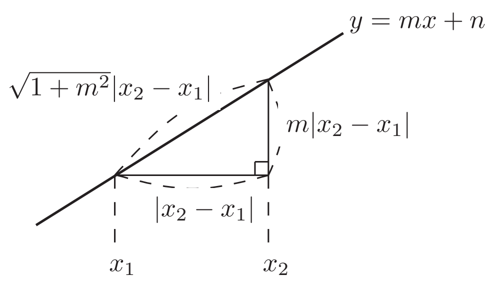
(2)　$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{P}(\beta_1)$，$\mathrm{Q}(\beta_2)$ とする。以下，xy 平面上で考え，$\mathrm{A}(a,\ b)$ とする。ただし，$a,\ b$ は問題の条件により $\dfrac{a^2}{9} + b^2 < 1$ をみたす。
直線 ℓ が x 軸に垂直なとき，$\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AQ}$ が最大となることはない。このとき，直線 ℓ の傾きを m とすると，$\ell : y = m(x-a) + b = mx + (-ma + b)$ であるので，C と ℓ の共有点（必ず 2 点存在する）の x 座標を考えると

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{9} + \{mx + (-ma + b)\}^2 = 1 \\ \iff &(1 + 9m^2)x^2 + 18m(-ma + b)x + 9(-ma + b)^2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

$1 + 9m^2 \fallingdotseq 0$ より，2 実数解を $p,\ q$ とすると，解と係数の関係より

$$p + q = \frac{18m(ma - b)}{1 + 9m^2},\ pq = \frac{9(-ma + b)^2 - 9}{1 + 9m^2} \quad \cdots ①$$





このとき

$$
\begin{aligned}
|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha| &= \mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\\
&= \sqrt{1+m^2}|a-p|\cdot\sqrt{1+m^2}|a-q|\\
&= (1+m^2)|a^2-(p+q)a+pq|\\
&= (1+m^2)\left|a^2-\frac{18ma(ma-b)}{1+9m^2}+\frac{9(-ma+b)^2-9}{1+9m^2}\right| \quad (\because ①)\\
&= (1+m^2)\left|\frac{a^2(1+9m^2)-18ma(ma-b)+9(-ma+b)^2-9}{1+9m^2}\right|\\
&= \frac{1+m^2}{1+9m^2}|a^2+9b^2-9|\\
&= \frac{9(1+m^2)}{1+9m^2}\left|\frac{a^2}{9}+b^2-1\right| \quad \cdots ②\\
&\left(= \frac{9(1+m^2)}{1+9m^2}\left(1-\frac{a^2}{9}-b^2\right) \quad \left(\because \frac{a^2}{9}+b^2<1\right) \quad \cdots ②'\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$\dfrac{9(1+m^2)}{1+9m^2}=1+\dfrac{8}{1+9m^2}$ であるので，$m^2 \geqq 0$ より ② (②$'$) は $m^2=0$，すなわち $m=0$ のとき最大となる。よって，積 $|\beta_1-\alpha|\cdot|\beta_2-\alpha|$ が最大となるのは，$\boldsymbol{\ell}$ が $\boldsymbol{x}$ 軸と平行な直線であるときである。

講評

1.［場合の数と確率］(標準)

例年通り，丁寧に場合分けして計算する確率の出題である。事象はやや複雑であるものの，実際に調べてみると状況が限られることに気付ける。

2.［数Ⅲ微分法，数Ⅲ積分法］（やや易）

絶対値を含む関数の微分可能性，またその関数の増減などに関する問題である。基本に忠実に計算していけばよい。

3.［整数の性質］（標準）

例年通り，思考するタイプの整数問題であるが，問題自体は易化した。(1) はいくつか実験してみると a_2，a_3 あたりの関係にすぐ気付けるので，その後は易しい。(2) も (1) を利用するだけで難しい部分はなく，(1) が勝負を分ける。

4.［複素数平面，2 次曲線］（やや難）

複素数平面上での軌跡に関する問題である。(1) は基本的な出題であるが，(2) は答えは予想できるものの方針に悩むだろう。xy 平面上で点 α の座標や傾きを文字で置いて計算するとすんなりいくが，ある程度の試行錯誤をした上でのことである。

全体的に易化した。大問 1，2 および大問 4(1) を素早く完答し，残りの問題に時間をかけたい。一次突破ラインは 55〜60% 程度か。