昭和大学医学部（II期） 数学

2021年 3月6日実施

$\boxed{1}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

a を正の実数とし，複素数平面上の点 $z_1=\sqrt{2}a+\sqrt{2}ai$，$z_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{3}{2}ai$ を考える。また，z_1 および z_2 を原点のまわりに角 θ_1 および θ_2 $(-\pi\leqq\theta_1<\pi,\ -\pi\leqq\theta_2<\pi)$ 回転させた点をそれぞれ w_1 および w_2 とする。ただし i は虚数単位とする。

(1) $|z_1z_2|$ および $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ を求めよ。

(2) $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ および $\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，w_1 および w_2 の値を求めよ。

(3) $|w_1+w_2|$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ_1 と θ_2 の関係をそれぞれ示せ。

解答

(1) 条件より

$$z_1=\sqrt{2}a(1+i)=2a\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_2=\frac{3}{2}a(\sqrt{3}-i)=3a\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

より，$|z_1|=2a$，$|z_2|=3a$ であるから

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|=2a\cdot 3a=\boldsymbol{6a^2}$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{2a}{3a}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(2) 点 w_1 は点 z_1 を原点を中心に θ_1 だけ回転した点なので

$$w_1=z_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$=2a\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta_1\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta_1\right)\right\}\ \cdots\cdots①$$

点 w_2 は点 z_2 を原点を中心に θ_2 だけ回転した点なので

$$w_2=z_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=3a\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\theta_2\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\theta_2\right)\right\}\cdots\cdots②$$

である。

特に $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$w_1=2a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{2ai}$$
$$w_2=3a\left(\cos 0+i\sin 0\right)=\boldsymbol{3a}$$

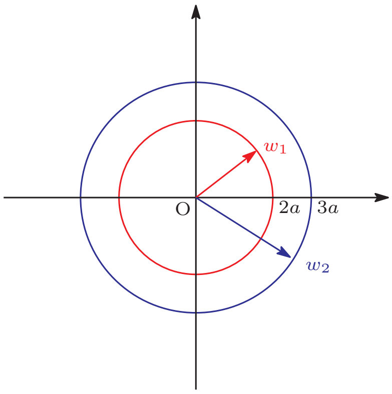
(3)　w_1，w_2 の偏角を $\arg w_1$，$\arg w_2$ とすると，①，②より

$$\arg w_1=\frac{\pi}{4}+\theta_1,\quad \arg w_2=-\frac{\pi}{6}+\theta_2$$

であることと，$-\pi\leqq\theta_1<\pi$，$-\pi\leqq\theta_2<\pi$ であることから

点 w_1 は原点を中心とする半径 $2a$ の円周上を動き，

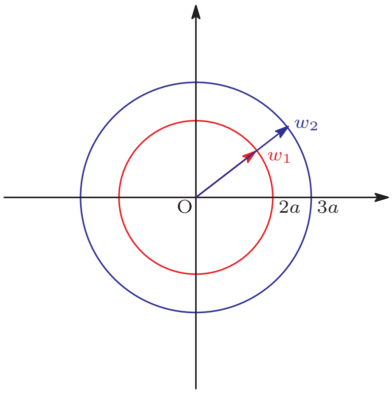
点 w_2 は原点を中心とする半径 $3a$ の円周上を動く。



θ_1，θ_2 は独立に変化するので $|w_1+w_2|$ が最大となるのは

3 点 0，w_1，w_2 がこの順に一直線上に並ぶときであるから，

最大値は $2a+3a=\boldsymbol{5a}$



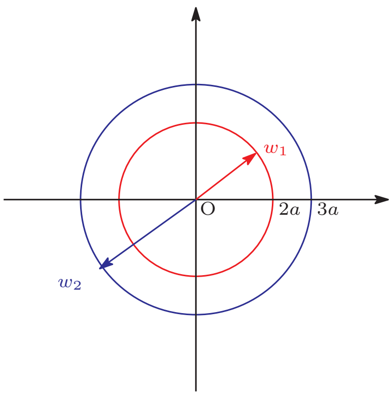
また，このとき偏角の関係は

$$\left(\frac{\pi}{4}+\theta_1\right)-\left(-\frac{\pi}{6}+\theta_2\right)=2k\pi\qquad(k\text{ は整数})$$
$$\theta_1-\theta_2=2k\pi-\frac{5}{12}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\theta_1-\theta_2=-\frac{5}{12}\pi}\text{ または }\boldsymbol{\theta_1-\theta_2=\frac{19}{12}\pi}\qquad(\because\ \ -2\pi<\theta_1-\theta_2<2\pi)$$

$|w_1+w_2|$ が最小となるのは

3 点 w_1，0，w_2 がこの順に一直線上に並ぶときであるから，

最大値は $|w_1+w_2|=|w_1|-|w_2|=3a-2a=\boldsymbol{a}$



また，このとき偏角の関係は

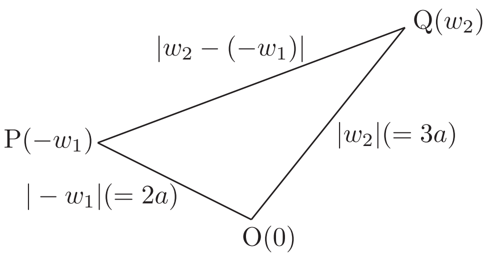
$$\left(\frac{\pi}{4}+\theta_1\right)-\left(-\frac{\pi}{6}+\theta_2\right)=(2l+1)\pi \qquad (l\text{ は整数})$$

$$\theta_1-\theta_2=(2l+1)\pi-\frac{5}{12}\pi$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta_1-\theta_2=-\frac{17}{12}\pi}\ \text{または}\ \boldsymbol{\theta_1-\theta_2=\frac{7}{12}\pi} \qquad (\because\ -2\pi<\theta_1-\theta_2<2\pi)$$

(補足)　$w_1+w_2=w_2-(-w_1)$ に注意すると，3 点 O(0)，P$(-w_1)$，Q(w_2) について三角形が成立するときまたは 3 点が一直線上に並ぶときを考えると，次の不等式（三角不等式）が成り立つ。

$$\big||w_2|-|-w_1|\big| \leqq |w_2-(-w_1)| \leqq |w_2|+|(-w_1)| \qquad \therefore\ a \leqq |w_2+w_1| \leqq 5a$$



左側の等号は，3 点 O(0)，P$(-w_1)$，Q(w_2) がこの順に一直線に並ぶとき成立し，
右側の等号は，3 点 P$(-w_1)$，O(0)，Q(w_2) がこの順に一直線に並ぶとき成立する。

$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

△OAB において，OA = 7，OB = 8，AB = 9 とする。また，△OAB の垂心を H，内心を I，外心を J とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

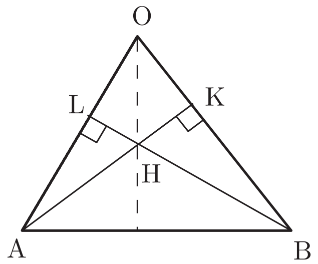
解答

$\left|\vec{a}\right| = 7$，$\left|\vec{b}\right| = 8$

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 9$ より

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = 9^2$$
$$\left|\vec{a}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 9^2$$
$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2} = \mathbf{16}$$

(2)



H から OA，OB への垂線の足ををそれぞれ K，L とし，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a} + y\vec{b}$（$x$，$y$ は実数）とおく。

H は △OAB の垂心であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{a} = \mathrm{OL}\cdot\mathrm{OA} = \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{b} = \mathrm{OK}\cdot\mathrm{OB} = \vec{a}\cdot\vec{b} \end{cases}$$

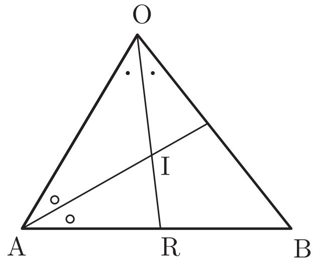
$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b} \\ (x\vec{a} + y\vec{b})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49x + 16y = 16 \\ 16x + 64y = 16 \end{cases} \qquad \therefore \ x = \frac{16}{60},\ y = \frac{11}{60}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \frac{\mathbf{16\,\overrightarrow{a} + 11\,\overrightarrow{b}}}{\mathbf{60}}$$

(3)



OI の延長と辺 AB の交点を R とする。
OI が ∠A の二等分線の交点であることから，

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RB} = \mathrm{OA}:\mathrm{OB} = 7:8$$

より

$$\mathrm{AR} = 9 \times \frac{7}{15} = \frac{21}{5}$$

さらに， AI が ∠A の二等分線の交点であることから，

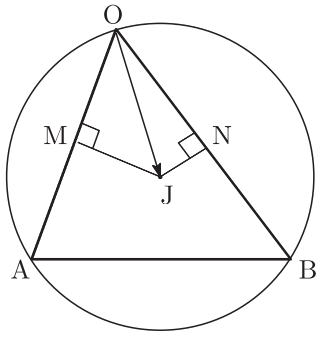
$$\mathrm{OI}:\mathrm{IR} = \mathrm{AO}:\mathrm{AR} = 7:\frac{21}{5} = 5:3$$

である。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{8\,\overrightarrow{a} + 7\,\overrightarrow{b}}{15}$$

$$= \frac{\mathbf{8\,\overrightarrow{a} + 7\,\overrightarrow{b}}}{\mathbf{24}}$$

(4)



J は △OAB の外心であるから，

J から OA，OB への垂線の足ををそれぞれ M，N とすると
M，N はそれぞれ OA，OB の中点である。$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$（$\alpha$，$\beta$ は実数）とおくと

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\cdot\overrightarrow{a}=\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OA}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{a}\right|^2\\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\cdot\overrightarrow{b}=\mathrm{ON}\cdot\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=\dfrac{49}{2}\\ (\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=32\end{cases}$$

$$\begin{cases}49x+16y=\dfrac{49}{2}\\ 16x+64y=32\end{cases}\qquad\therefore\ \alpha=\frac{44}{120},\ \beta=\frac{49}{120}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\frac{44\overrightarrow{a}+49\overrightarrow{b}}{120}}$$

(注)　△OAB の重心を G とし，
J，G，H は同一直線上にあり，G は JH を 1 : 2 に内分する（オイラー線）
であることを利用すると

$$\overrightarrow{\mathrm{JG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{JH}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{2}=\frac{44\overrightarrow{a}+49\overrightarrow{b}}{120}$$

$\boxed{3}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$m > 1$ とする。xy 平面において，

放物線 $y = mx - x^2$ ……①　と直線 $y = -x + m$ ……②

とがある。

(1-1)　①と②の交点の座標をすべて求めよ。

(1-2)　①と②とで囲まれる図形の面積と，①と②および y 軸とで囲まれる図形の面積が等しいとき，その面積を S とする。そのときの m の値と S の値を求めよ。

(2)　3 個のサイコロを同時に投げた。

サイコロは，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(2-1)　出た目に 2 または 3 が含まれる確率はいくらか。

(2-2)　出た目の和が偶数である確率はいくらか。

(2-3)　出た目の和が 12 である確率はいくらか。

解答

(1-1)　①②を連立して

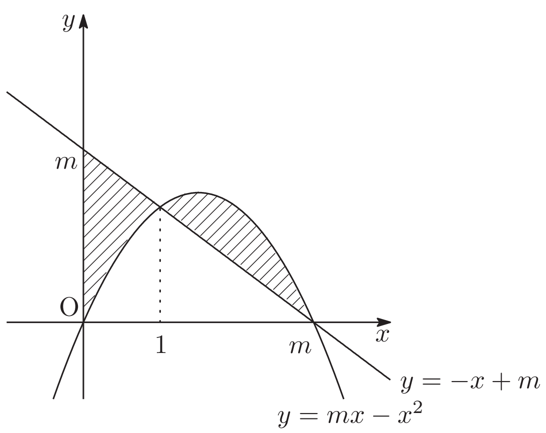
$$mx - x^2 = -x + m \iff x^2 - (m+1)x + m = 0 \iff (x-1)(x-m) = 0 \iff x = 1,\ m$$

②より，$x = 1$ のとき $y = m - 1$，$x = m$ のとき $y = 0$

よって，求める交点の座標は

$$\boldsymbol{(1,\ m-1),\ (m,\ 0)}$$

(1-2)



図の 2 つの斜線部分の面積が等しいことから

$$\int_0^1 \{(-x+m)-(mx-x^2)\}dx = \int_1^m \{(mx-x^2)-(-x+m)\}dx$$

$$\iff \int_0^1 \{x^2-(m+1)x+m\}dx = \int_1^m -\{x^2-(m+1)x+m\}dx$$

$$\iff \int_0^1 \{x^2-(m+1)x+m\}dx + \int_1^m \{x^2-(m+1)x+m\}dx = 0$$

$$\iff \int_0^m \{x^2-(m+1)x+m\}dx = 0$$

$$\iff \left[\frac{x^3}{3}-(m+1)\cdot\frac{x^2}{2}+mx\right]_0^m = 0$$

$$\iff m^2(m-3)=0$$

$$\iff m=\mathbf{3} \quad (\because m>1)$$

このとき，

$$S = \int_1^3 \{(3x-x^2)-(-x+3)\}dx$$

$$= \int_1^3 -(x-1)(x-3)dx$$

$$= -\left\{-\frac{(3-1)^3}{6}\right\}$$

$$= \mathbf{\frac{4}{3}}$$

(2-1)　2 または 3 以外の目が出る場合の余事象なので，求める確率は

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{19}{27}}$$

(2-2)　出た目の組み合わせが { 奇，奇，偶 }，{ 偶，偶，偶 } のとき出た目の和は偶数となる。また，出た目の組み合わせが { 偶，偶，奇 }，{ 奇，奇，奇 } のとき出た目の和は奇数となる。
{ 奇，奇，偶 } と { 偶，偶，奇 }，{ 偶，偶，偶 } と { 奇，奇，奇 } となる場合の数はそれぞれ等しいので，求める確率は

$$\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2-3)　出た目の和が 12 となるサイコロの組み合わせは

$$\{1,\ 5,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\},\ \{2,\ 5,\ 5\},\ \{3,\ 3,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 5\},\ \{4,\ 4,\ 4\}$$

$\{1,\ 5,\ 6\}$，$\{2,\ 4,\ 6\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$ となる場合の数は，それぞれ $3!=6$（通り）
$\{2,\ 5,\ 5\}$，$\{3,\ 3,\ 6\}$ となる場合の数は，それぞれ $\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）
$\{4,\ 4,\ 4\}$ となる場合の数は，1（通り）
よって，求める確率は

$$\frac{6\times3+3\times2+1}{6^3} = \mathbf{\frac{25}{216}}$$

$\boxed{4}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(x+2)dx$ を求めよ。

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{1-t}{t^2+1}dt$ を最大にする x の値を求めよ。

(3) $y=2\cos 3x+\cos 2x+2\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

解答

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x+2)dx &= \Big[\ (x+2)\log(x+2)\ \Big]_0^1-\int_0^1(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}dx\\ &=3\log 3-2\log 2-\Big[\ x\ \Big]_0^1\\ &=\mathbf{3\log 3-2\log 2-1}\end{aligned}$$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{1-t}{t^2+1}dt$ を x で微分して

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1-(x+1)}{(x+1)^2+1}\cdot(x+1)'-\frac{1-x}{x^2+1}\cdot(x)'\\ &=\frac{1-(x+1)}{(x+1)^2+1}-\frac{1-x}{x^2+1}\\ &=\frac{(x+1)(x-2)}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}\end{aligned}$$

であるので，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$F(-1)=\displaystyle\int_{-1}^0\frac{1-t}{t^2+1}dt>0$ $\left(\because\ -1\leqq t\leqq 0\text{ において，}\dfrac{1-t}{t^2+1}>0\right)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)<0$ より，$F(x)$ を最大にする x は

$$x=\mathbf{-1}$$

(参考) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)<0$ は，たとえば次のように示せる。

$x\to\infty$ より，十分大きな x について考える。このとき，$x\leqq t\leqq x+1$ において，$\dfrac{1-t}{t^2+1}<0$ であるから

$$\int_x^{x+1}\frac{1-t}{t^2+1}dt<0$$

が成立する。したがって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)<0$ である。

(3)　$\cos x = t$ とすると $-1 \leqq t \leqq 1$ であるから，$y = f(t)$ として

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) + 2\cos x \\ &= 2(4t^3 - 3t) + (2t^2 - 1) + 2t \\ &= 8t^3 + 2t^2 - 4t - 1 \end{aligned}$$

$-1 < t < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(t) &= 24t^2 + 4t - 4 \\ &= 4(2t+1)(3t-1) \end{aligned}$$

したがって，増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{49}{27}$	$\nearrow$	5

よって

最大値：**5**，最小値：**−3**

講評

$\boxed{1}$［複素数平面］(やや易)

(1)(2) は基本的で落とせない。(3) は図形的に考えると解きやすい。

$\boxed{2}$［平面ベクトル］(標準)

どれも典型的な問題である。(4) はオイラー線の知識があると簡単に解けるだろう。

$\boxed{3}$［小問集合］((1) やや易 (2) やや易)

(1) 数Ⅱ積分法，(2) 確率からの出題であった。どちらも基本的な内容であり，計算量も少なめであった。YMS 生は (1) の類題を前日の直前講習で演習している。

$\boxed{4}$［小問集合］((1) 易 (2) 標準 (3) やや易)

(1) 積分法，(2) 積分法，(3) 数Ⅱ微分法，三角関数からの出題であった。(1)(3) は落とせない。

昨年度より易化した。計算量も少なくなり，高得点勝負になるだろう。目標は 75% 程度。