医学部専門予備校 YMS × 医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

昭和大学医学部（Ⅰ期）　数学

2021年2月5日実施

$\boxed{1}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

座標平面上において原点を O とする。O を中心とする半径 $2\sqrt{7}$ の円 C_1 を考える。C_1 と x 軸との交点を $\mathrm{A}(-2\sqrt{7},\ 0)$，$\mathrm{B}(2\sqrt{7},\ 0)$ とする。C_1 上の点 E，F でできる線分 EF で C_1 を，円弧の部分が OB の中点 C で x 軸に接するように折り返す。ただし，E，F の y 座標は負でないとする。

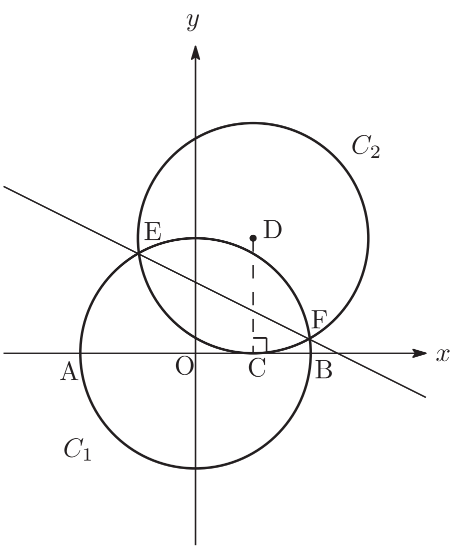
(1)　折り返して得られる円弧を一部とする円 C_2 の中心を D とするとき，D の座標を求めよ。また C_2 を表す式を求めよ。

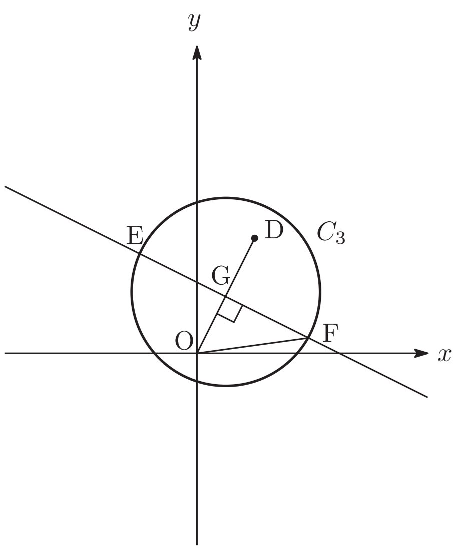
(2)　EF を直径とする円 C_3 を考えるとき，円の中心 G の座標を求めよ。また C_3 を表す式を求めよ。

(3)　C_3 と y 軸の 2 つの交点を考えるとき，この 2 点間の距離を求めよ。

(4)　C_1 の円周のうち，$-2\sqrt{7} \leqq x \leqq 2\sqrt{7}$，$0 \leqq y \leqq 2\sqrt{7}$ の部分を考える。円周上の弧 PQ を弦 PQ で折り返したとき，折り返された弧が x 軸に接するようにする。このような弦 PQ の存在する範囲を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$





(1)　円 C_2 の半径は C_1 と同じく $2\sqrt{7}$ である。

2 点 E，F の y 座標が 0 以上であることから，円 C_2 の中心 D の y 座標も 0 以上である。

さらに，円 C_2 は点 C において x 軸に接するから，

その中心の座標は $\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\sqrt{7},\ 2\sqrt{7}}\right)$

円 C_2 の方程式は

$$(x-\sqrt{7})^2+\left(y-2\sqrt{7}\right)^2=(2\sqrt{7})^2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{(x-\sqrt{7})^2+\left(y-2\sqrt{7}\right)^2=28}$$

(2)　点 G は 2 点 O，D の中点であるから

$$\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2},\ \sqrt{7}}\right)$$

であり，その半径 GF は直角三角形 OGF に着目して

$$\mathrm{GF}=\sqrt{\mathrm{OF}^2-\mathrm{OG}^2}$$
$$=\sqrt{28-\frac{35}{4}}=\sqrt{\frac{77}{4}}$$

であるから，円 C_3 の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{7}\right)^2=\frac{77}{4}}$$

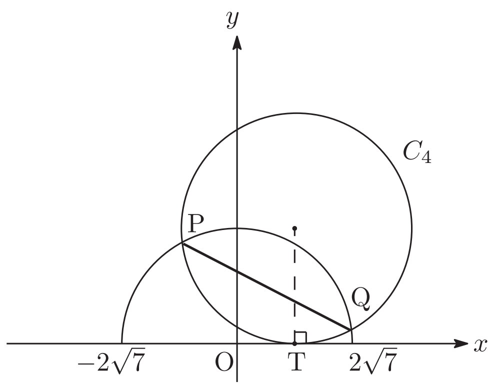
(3)　円 C_3 と y 軸の交点の y 座標は，C_3 の方程式に $x=0$ を代入して

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$
$$(y-\sqrt{7})^2=\frac{70}{4}$$
$$y-\sqrt{7}=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$$
$$\therefore\ y=\sqrt{7}\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$$

よって，2 点間の距離は

$$\left(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{70}}{2}\right)-\left(\sqrt{7}-\frac{\sqrt{70}}{2}\right)=\boldsymbol{\sqrt{70}}$$

(4)



円 C_1 の方程式は

$$x^2+y^2=28\ \cdots\cdots ①$$

折り返してできる円弧と x 軸との接点を $\mathrm{T}(t,\ 0)$（$-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$）とおく。
折り返してできる円弧を含む円を C_4 とすると，
円 C_4 の中心は $\left(t,\ 2\sqrt{7}\right)$，半径は $2\sqrt{7}$ であるから，
円 C_4 の方程式は

$$(x-t)^2+\left(y-2\sqrt{7}\right)^2=28 \ \cdots\cdots ②$$

である。さらに，直線 PQ の方程式は ② − ① を計算することにより

$$2tx+4\sqrt{7}y-t^2-28=0 \ \cdots\cdots ③$$

である。弦 PQ の存在領域は，
t が $-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ を動くときの直線 PQ の存在領域のうち，
$x^2+y^2 \leqq 28$ を満たす部分である。

t が $-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ を動くときの直線 PQ の存在領域は，
③ を t で整理した方程式

$$t^2-2xt-4\sqrt{7}y+28=0 \ \cdots\cdots ④$$

が $-2\sqrt{7} \leqq t \leqq 2\sqrt{7}$ に少なくとも 1 つの解を持つような点 $(x,\ y)$ の集合である。
以下，

$$f(t)=t^2-2xt-4\sqrt{7}y+28=(t-x)^2-x^2-4\sqrt{7}y+28$$

とする．

(i)　$x \leqq -2\sqrt{7}$ の場合
条件は

$$\begin{cases} f(-2\sqrt{7}) \leqq 0 \\ \text{かつ} \\ f(2\sqrt{7}) \geqq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y \geqq x+2\sqrt{7} \\ \text{かつ} \\ y \leqq -x+2\sqrt{7} \end{cases}$$

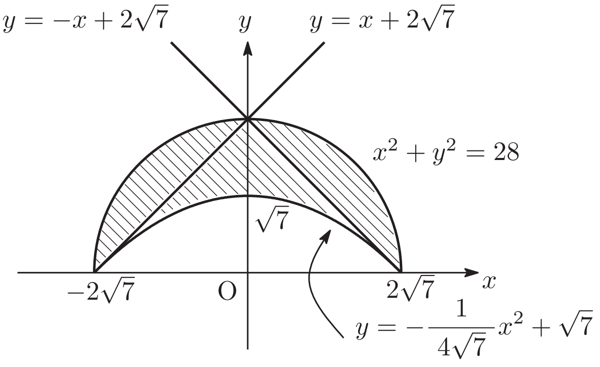
(ii)　$-2\sqrt{7} \leqq x \leqq 2\sqrt{7}$ の場合
条件は

$$\begin{cases} -x^2-4\sqrt{7}y+28 \leqq 0 \\ \text{かつ} \\ f(-2\sqrt{7}) \geqq 0 \text{ または } f(2\sqrt{7}) \geqq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7} \\ \text{かつ} \\ y \leqq x+2\sqrt{7} \text{ または } y \leqq -x+2\sqrt{7} \end{cases}$$

(iii)　$2\sqrt{7} \leqq x$ の場合
条件は

$$\begin{cases} f(-2\sqrt{7}) \geqq 0 \\ \text{かつ} \\ f(2\sqrt{7}) \leqq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y \leqq x+2\sqrt{7} \\ \text{かつ} \\ y \geqq -x+2\sqrt{7} \end{cases}$$

(i) または (ii) または (iii) を満たす領域のうち,
$x^2+y^2 \leqq 28$ を満たす部分を図示すると,次の図の斜線部分 (境界含む) のようになる。



$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　6 桁の自然数 2021□2 が 8 の倍数であるとき，□ に入る数字をすべて求めよ。

(2)　$(\sqrt{n^2-9n+19})^{n^2+5n-14}=1$ を満たす自然数 n をすべて求めよ。

(3)　m，n を自然数とするとき，m, $m+2$, $m+4$, $m+8$, $\cdots$, $m+2^n$（このような組を $(*)$ とする。）の和がちょうど 1000 になるとする。このような $(*)$ をすべて求めよ。

解答

(1)　□ に入る数を a（$0 \leqq a \leqq 9$）とする。
以下，$\equiv$ はすべて $\pmod 8$ で考えるものとする。

$$\begin{aligned}
&2021a2 \equiv 0\\
&202\times 1000+100+10a+2\equiv 0\\
&2a+6\equiv 0
\end{aligned}$$

これを満たす a は $a=\mathbf{1,\ 5,\ 9}$

(注)　自然数 N が 8 の倍数 $\Longleftrightarrow$ N の下 3 桁が 8 の倍数

(2)　条件を満たすのは，次の 3 つの場合である。

(ア) $n^2-9n+19=1$ の場合
(イ) $n^2+5n-14=0$ の場合
(ウ) $n^2-9n+19=-1$ かつ $n^2+5n-14$ が 4 の倍数の場合

(ア) の場合

$$\begin{aligned}
&n^2-9n+19=1\\
&(n-3)(n-6)=0 \qquad \therefore\ n=3,\ 6
\end{aligned}$$

(イ) の場合

$$\begin{aligned}
&n^2+5n-14=0\\
&(n-2)(n+7)=0 \qquad \therefore\ n=2 \qquad (\because\ n\geqq 1)
\end{aligned}$$

(ウ) の場合

$$\begin{aligned}
&n^2-9n+19=-1\\
&(n-4)(n-5)=0 \qquad \therefore\ n=4,\ 5
\end{aligned}$$

$n=4$ のときは $n^2+5n-14=22$ であり不適。
$n=5$ のときは $n^2+5n-14=36$ となり，4 の倍数であるから適する。

以上により，$n=\mathbf{2,\ 3,\ 5,\ 6}$

(3)　条件より

$$\begin{aligned}
&m+(m+2)+(m+4)+\cdots\cdots+(m+2^n)=1000 \qquad (m\geqq 1,\ n\geqq 1)\\
&m(n+1)+\sum_{k=1}^{n}2^k=1000
\end{aligned}$$

$$m(n+1)+2(2^n-1)=1000$$
$$m(n+1)=2(501-2^n)\ \cdots\cdots①$$

$m(n+1) \geqq 0$ であるから，

$$501-2^n \geqq 0$$
$$2^n \leqq 501$$
$$\therefore\ 1 \leqq n \leqq 8$$

この範囲で①を満たす $(n,\ m)$ は

$$(n,\ m)=(1,\ 499),\ (4,\ 194)$$

よって，求める数字の組 $(*)$ は

$$\mathbf{(499,\ 501),\ (194,\ 196,\ 198,\ 202,\ 210)}$$

$\boxed{3}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　白球 7 個，赤球 3 個の計 10 個の球の入った袋がある。いまこの袋から 1 個ずつ順に 3 回球を取り出す。白球を取り出したときは球を戻さないが，赤球を取り出したときは球を袋に戻すとする。

(1-1)　取り出した球が少なくとも 1 個は赤球であった確率を求めよ。

(1-2)　3 回目に取り出したのが白球であり，袋に残った球が 8 個であった確率を求めよ。

(2)　xy 平面において，

$$y^2 \leqq x-1 \quad \text{かつ} \quad (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1$$

をみたす点 $(x,\ y)$ の集合からなる図形を A とする。

(2-1)　図形 A の面積 S を求めよ。

(2-2)　図形 A を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解答

(1-1)　取り出した球が 3 個とも白球である確率は，袋の中にある球の個数に注意して

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$$

したがって，取り出した球が少なくとも 1 個は赤球であった確率は，余事象を考えて

$$1-\frac{7}{24}=\mathbf{\frac{17}{24}}$$

(1-2)　袋に残った球が 8 個であったのは，途中 2 個の赤球を袋から取り出したときであるので，3 回目に取り出したのが白球であることを踏まえると，次の 2 通りの取り出し方が考えられる。

	1 回目	2 回目	3 回目
i)	赤球	白球	白球
ii)	白球	赤球	白球

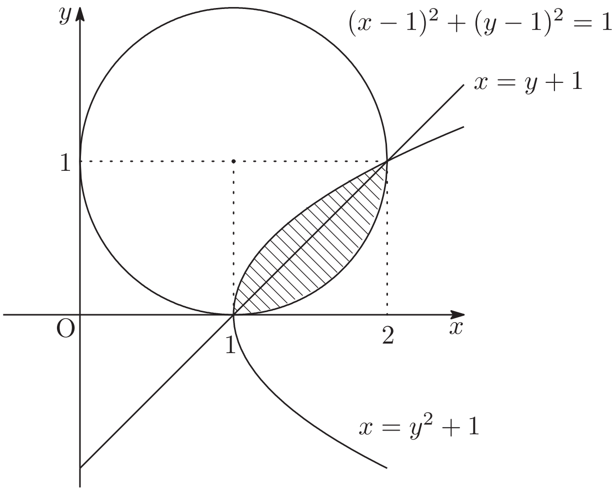
したがって，袋の中にある球の個数に注意して，それぞれの確率を計算すると

$$\text{i)}\quad \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}$$
$$\text{ii)}\quad \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{9}$$

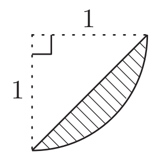
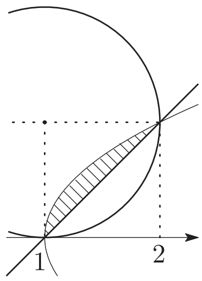
i) ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{9}=\mathbf{\frac{133}{450}}$$

(2-1)　図形 A を図示すると，下図の斜線部分のようになる。ただし，境界を含む。



2 曲線の交点を通る直線の方程式は $y=x-1 \iff x=y+1$ であるので，求める面積 S は

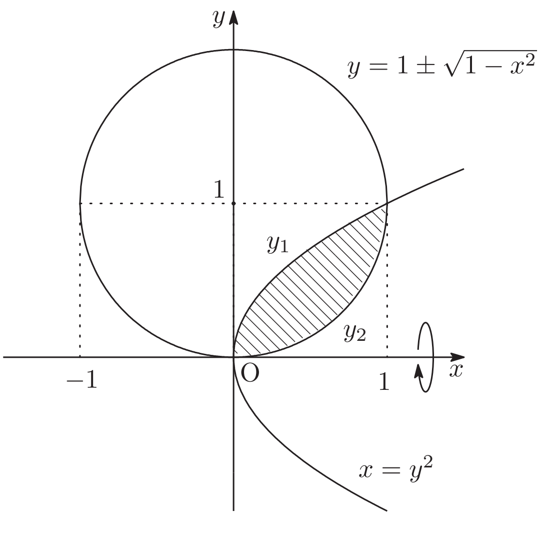
$S=$  $+$ 

$$= \left(\frac{1^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)+\int_0^1\{(y+1)-(y^2+1)\}dy$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}}$$

(2-2)　図形 A を x 軸方向に -1 だけ平行移動して考える。このとき，$x=y^2$ に対応する y を y_1，$x^2+(y-1)^2=1,\ y \leqq 1 \iff y=1-\sqrt{1-x^2}$ に対応する y を y_2 とする。

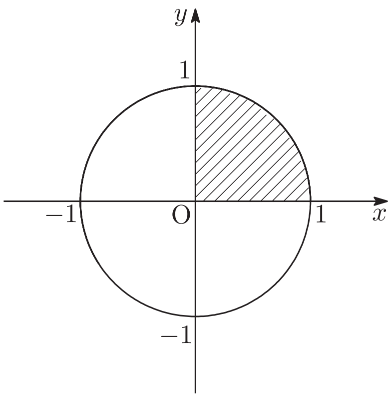


このとき，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 {y_1}^2 dx - \int_0^1 {y_2}^2 dx \\
&= \int_0^1 x dx - \int_0^1 (1-\sqrt{1-x^2})^2 dx \\
&= \int_0^1 (x-2+x^2+2\sqrt{1-x^2}) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} \quad \left(\because \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \text{ は半径 1 の四分円の 1 つの面積を表す。}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{V = \frac{\pi^2}{2} - \frac{7}{6}\pi}$

(補足 1)　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ について，$y=\sqrt{1-x^2} \iff x^2+y^2=1,\ y \geqq 0$ となるので，$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ は下図の斜線部分の面積を表す。



(補足 2)　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ について，$x=\sin\theta$ とおくと，$dx=\cos\theta d\theta$ であり，$x:0\to 1$ のとき θ: $0\to\dfrac{\pi}{2}$ であるので

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)

(1-1)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）の面積 S を求めよ。

(1-2)　曲面 $px^2+qy^2=z+2$（p，q は正の定数）と xy 平面で囲まれる立体の体積 V を求めよ。

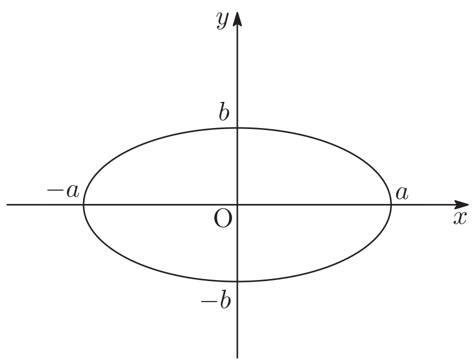
(2)　A が金貨 4 枚，B が銀貨 3 枚を投げる。
硬貨の表が出た枚数の多い方を勝ち，同じ枚数のときは引き分けとする。
ただし硬貨の表裏の出る確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ であるものとする。

(2-1)　A の勝つ確率，B の勝つ確率，引き分けの確率を求めよ。

(2-2)　勝ったほうが相手の投げた硬貨を全部もらえるものとする。金貨の額面は銀貨の額面の整数倍とする。B が勝ち取る金額の期待値（平均値）を A のそれよりも高くしたい。金貨の額面は銀貨の額面の少なくとも何倍とすべきか。

$\boxed{\text{解答}}$

(1-1)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \iff y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ であるので，求める面積 S は，対称性に注意して

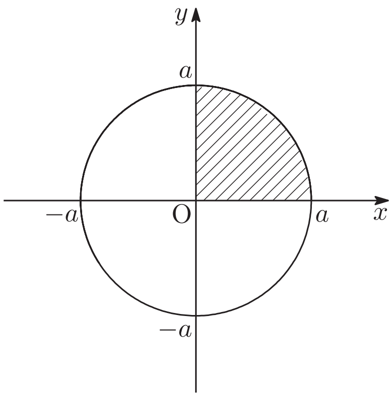


$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= \frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} \quad \left(\because \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \text{ は半径 } a \text{ の四分円の 1 つの面積を表す。}\right) \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

(注)　楕円の面積公式より $S=\pi ab$ としてもよい。

(補足 1)　$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ について，$y=\sqrt{a^2-x^2} \iff x^2+y^2=a^2,\ y\geqq 0$ となるので，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は下図

の斜線部分の面積を表す。



(補足 2)　$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ について，$x = a\sin\theta$ とおくと，$dx = a\cos\theta d\theta$ であり，$x : 0 \to a$ のとき θ: $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ であるので

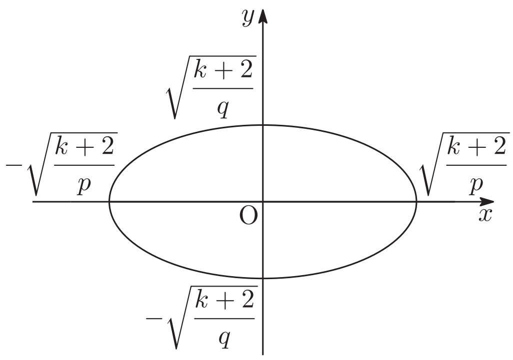
$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta d\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\ &= a^2\Big[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

(1-2)　曲面 $px^2+qy^2 = z+2 \geqq 0$ より，$z \geqq -2$ となる。

ここで，$z = k$（$-2 \leqq k \leqq 0$）による曲面 $px^2+qy^2 = z+2$ の断面を考えると，$-2 < k \leqq 0$ のとき

$$px^2+qy^2 = k+2 \iff \frac{x^2}{\frac{k+2}{p}}+\frac{y^2}{\frac{k+2}{q}} = 1$$

となるので，断面積 $T(k)$ は (1-1) より



$$T(k) = \pi\sqrt{\frac{k+2}{p}}\sqrt{\frac{k+2}{q}} = \frac{\pi}{\sqrt{pq}}(k+2)$$

したがって，求める立体の体積 V は

$$V = \int_{-2}^0 T(k)dk = \int_{-2}^0 \frac{\pi}{\sqrt{pq}}(k+2)dk = \frac{\pi}{\sqrt{pq}}\Big[\frac{k^2}{2}+2k\Big]_{-2}^0 = \boldsymbol{\frac{2\pi}{\sqrt{pq}}}$$

(2-1)　A と B それぞれの硬貨の表の出る枚数とその確率の計算式および計算結果は下の表のようになる。

	0 枚	1 枚	2 枚	3 枚	4 枚
A	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$	${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$	${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
B	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$	${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$	

ここで，A と B の表が出る枚数をそれぞれ A，B 枚（$0 \leqq A \leqq 4$，$0 \leqq B \leqq 3$）とすると，A が勝つのは

$A = 1$ のとき，$B = 0$
$A = 2$ のとき，$B = 0,\ 1$
$A = 3$ のとき，$B = 0,\ 1,\ 2$
$A = 4$ のとき，$B = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

のときであるから，A の勝つ確率は

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{16}\cdot 1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

また，引き分けとなるのは $A = B$ のときであるから，引き分けの確率は

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \mathbf{\frac{35}{128}}$$

B の勝つ確率は，余事象を考えて

$$1-\frac{1}{2}-\frac{35}{128} = \mathbf{\frac{29}{128}}$$

(2-2)　銀貨 1 枚の額面を x（$x > 0$），金貨 1 枚の額面をその a 倍（a は自然数）の ax とする。
このとき，勝ちとる金額の期待値は (2-1) より，

$$\mathrm{A}\cdots\ \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x = \frac{3}{2}x\ ,\quad \mathrm{B}\cdots\ \frac{29}{128}\cdot 4\cdot ax = \frac{29}{32}ax$$

となる。したがって，B が勝ち取る金額の期待値が A のそれよりも高くなるとき

$$\frac{29}{32}ax > \frac{3}{2}x \iff a > \frac{48}{29} \quad (\because x > 0)$$

よって，a が自然数であることより $a = 2$ であるので，金貨の額面が銀貨の額面の少なくとも **2 倍** となっていればよい。

(補足)　損失する金額も含めて勝ち取る金額の期待値を計算すると

$$\mathrm{A}\cdots\ \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x-\frac{29}{128}\cdot 4\cdot ax\ ,\quad \mathrm{B}\cdots\ \frac{29}{128}\cdot 4\cdot ax-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x$$

となるので，次の不等式が得られ，解答と同じ結果を得る。

$$\frac{29}{128}\cdot 4\cdot ax-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x > \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x-\frac{29}{128}\cdot 4\cdot ax \iff a > \frac{48}{29}$$

講評

$\boxed{1}$［図形と方程式］(標準)

典型的な問題であるが，経験で差がつくであろう。

$\boxed{2}$［小問集合］((1) 易 (2) やや易 (3) やや易)

(1) は下三桁が 8 の倍数になるように考えるだけである。(2) は $\sqrt{}$ の中身が -1 となる場合を見落とさないようにしたい。(3) は和を立式して $n \leqq 8$ でしらみつぶしに調べていけばよい。最低 2 題は完答が必要だろう。

$\boxed{3}$［小問集合］((1) やや易 (2) 標準)

(1) は基本的な確率であったが，(1-2) の表現にとまどった受験生は多かったかもしれない。(2) は入試レベルとしては典型的な面積，体積の問題である。計算ミスに注意したい。

$\boxed{4}$［小問集合］((1) 標準 (2)　やや易)

(1) は楕円を積み重ねた立体の体積の問題で，(1-2) は誘導に従って $z = k$ の断面を考えられれば問題ないだろう。(2) は昭和ではおなじみの期待値の出題である。(2-1) の計算ミスに注意したい。

難易度は昨年度同様に 2019 年度以前より易化した。計算量も時間を考えると適正である。目標は 70% 程度。