解答速報

日本医科大学（前期）　数学

2021年2月2日実施

[I]

3 枚の硬貨 X，Y，Z を同時に投げて，表裏を調べるという試行 T を繰り返し行う。座標空間内の動点 P は点 A$(a,\ b,\ c)$ から出発し，硬貨の表裏に応じて，次の規則にしたがって移動する。

[規則 1]　X が表の場合は x 軸方向に $+1$，裏の場合は x 軸方向に -1 だけ平行移動する。
[規則 2]　Y が表の場合は y 軸方向に $+1$，裏の場合は y 軸方向に -1 だけ平行移動する。
[規則 3]　Z が表の場合は z 軸方向に $+1$，裏の場合は z 軸方向に -1 だけ平行移動する。

このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　はじめに，試行 T を続けて 6 回行ったところ，X, Y，Z が表となった回数はそれぞれ 2，3，4 であり，このとき，P は原点にあったという。a，b，c の値をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 2　次に，動点 P を問 1 で定まった定点 A に戻してから，試行 T を続けて 5 回行った。このとき，点 P が次の集合に属する確率を求めよ。答えのみでよい。ただし，有理数は既約分数で表すこと。

(1)　$\{(x,\ y,\ z) \mid z = -1\}$
(2)　$\{(x,\ y,\ z) \mid y \leqq 4,\ z = -1\}$
(3)　$\{(x,\ y,\ z) \mid x > 2,\ y + z = 2\}$

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　X, Y，Z が表となった回数はそれぞれ 2，3，4 であるから動点 P は定点 A から x 軸方向に -2，y 軸方向に 0，z 軸方向に 2 だけ平行移動したこととなる。よって，$(a-2,\ b,\ c+2) = (0,\ 0,\ 0)$ より，$\boldsymbol{a = 2,\ b = 0,\ c = -2}$

問 2　硬貨 X, Y，Z が表となった回数をそれぞれ p，q，r（p，q，r は 0 以上 5 以下の整数）とすると，5 回の試行による移動は

x 軸方向への平行移動が $1 \cdot p + (-1) \cdot (5-p) = 2p - 5$ ……①
y 軸方向への平行移動が $1 \cdot q + (-1) \cdot (5-q) = 2q - 5$ ……②
z 軸方向への平行移動が $1 \cdot r + (-1) \cdot (5-r) = 2r - 5$ ……③

(1)　硬貨 X，Y は z 軸方向への平行移動に影響しないので，硬貨 Z に注目する。
動点 P の z 座標が -1 より求める条件は③から，$-2 + (2r-5) = -1 \iff r = 3$，すなわち硬貨 Z は表が 3 回，裏が 2 回となるときであるから，求める確率は

$${}_5\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2)　(1) と同様に考えて硬貨 Y，Z のみに注目する。

硬貨 Y に注目すると，動点 P の y 座標が 4 以下より求める条件は②から $0+(2q-5) \leqq 4 \iff q \leqq \dfrac{9}{2}$，すなわち硬貨 Y の表の回数が 4 回以下のときであるから，5 回すべてが表である事象の余事象と考えて，$y \leqq 4$ となる確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$$

また，硬貨 Z に注目すると，動点 P の z 座標が -1 となる確率は (1) から $\dfrac{5}{16}$

$y \leqq 4$ となる事象と $z=-1$ となる事象は互いに独立であるから，求める確率は

$$\frac{31}{32}\cdot\frac{5}{16}=\boldsymbol{\frac{155}{512}}$$

(3)　硬貨 X に注目すると，動点 P の x 座標が 2 より大きいことより求める条件は $2+(2p-5)>2 \iff p>\dfrac{5}{2}$，すなわち硬貨 X の表の回数が 3 回以上のときであるから，$x>2$ となる確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2}$$

また，硬貨 Y，Z に注目すると，動点 P が点 A にあるときは $y+z=-2$ であり，硬貨 Y，Z がともに表である（事象 A とする）とき $y+z$ の値は 2 だけ増え，表と裏が 1 枚ずつである（事象 B とする）とき $y+z$ の値は変わらず，2 回とも裏である（事象 C とする）とき $y+z$ の値は 2 だけ減ることから，事象 A, B, C の回数を $(A,\ B,\ C)$ と表すこととすると，$(A,\ B,\ C)=(2,\ 3,\ 0)$，$(3,\ 1,\ 1)$ のいずれかとなる。したがって，$y+z=2$ となる確率は

$$\frac{5!}{2!3!0!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{3!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{128}$$

$x>2$ となる事象と $y+z=2$ となる事象は互いに独立であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{128}=\boldsymbol{\frac{15}{256}}$$

［II］

a を実数の定数とする。O を原点とする座標平面において，曲線 C：$y=|x|(6-x)+x$ と直線 L：$y=5ax+a^4$ の共有点の個数を $N(a)$ とおくとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　直線 L が原点を通るような定数 a の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問 2　曲線 C 上の点 $(1,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

問 3　$N(a)$ を求めよ。

解答

問 1　L：$y=5ax+a^4$ が原点を通ることより，$0=a^4 \iff \boldsymbol{a=0}$

問 2　曲線 C は

$$y=\begin{cases}-x^2+7x & (x>0)\\ x^2-5x & (x\leqq 0)\end{cases}$$

であるので，$x>0$ のとき $y'=-2x+7$ であるから，$x=1$ のとき $y'=5$
したがって，求める接線の方程式は，$y=5(x-1)+6 \iff \boldsymbol{y=5x+1}$

問 3　まず，C と L が接するときの a の値を求める。$a^4\geqq 0$ より，L の y 切片は 0 以上であるので，C と L は $x>0$ において接する。ゆえに，$y=-x^2+7x$ と $y=5ax+a^4$ を連立して

$$-x^2+7x=5ax+a^4 \iff x^2+(5a-7)x+a^4=0$$

より，判別式を D とすると

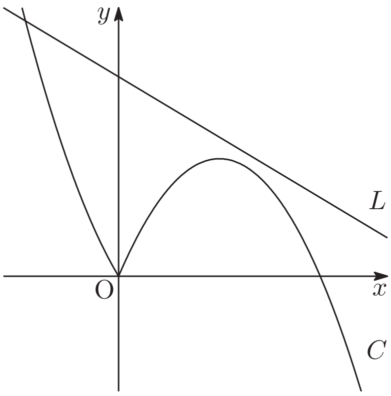
$$D=(5a-7)^2-4a^4=(5a-7-2a^2)(5a-7+2a^2)=-(2a^2-5a+7)(2a^2+5a-7)$$

したがって，C と L が接するとき $D=0$ より

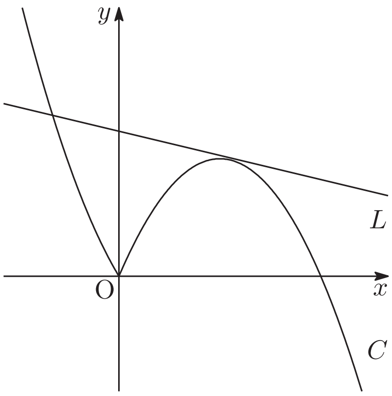
$$\begin{aligned}D=0 &\iff 2a^2+5a-7=0 \quad \left(\because\ 2a^2-5a+7=2\left(a-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{8}>0\right)\\ &\iff (2a+7)(a-1)=0\\ &\iff a=-\frac{7}{2},\ 1\end{aligned}$$

また，$a<-\dfrac{7}{2}$，$1<a$ において $D<0$，$-\dfrac{7}{2}<a<1$ において $D>0$ となることに注意して，C と L のグラフの位置関係は次のようになる。

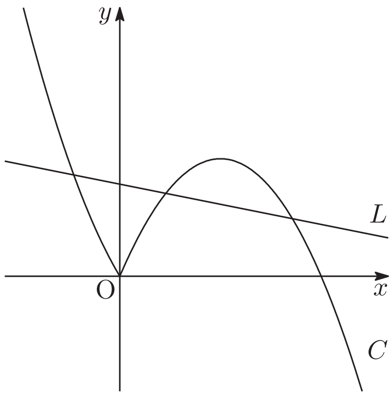
i) $a < -\dfrac{7}{2}$ のとき



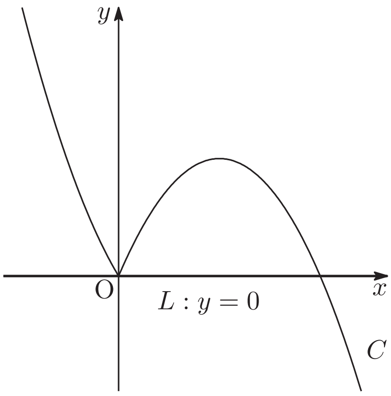
ii) $a = -\dfrac{7}{2}$ のとき



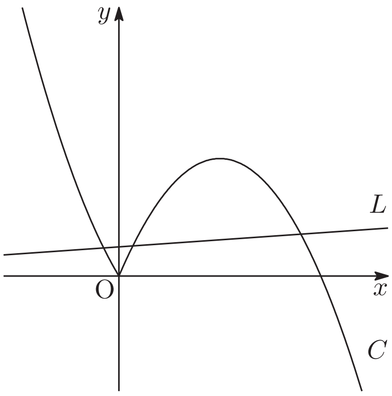
iii) $-\dfrac{7}{2} < a < 0$ のとき



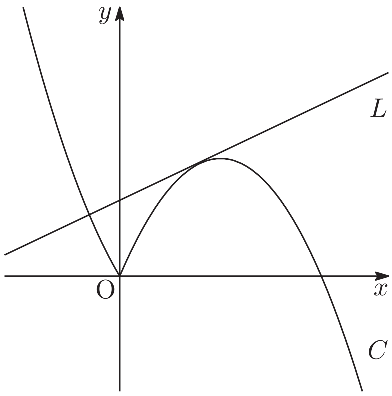
iv) $a = 0$ のとき



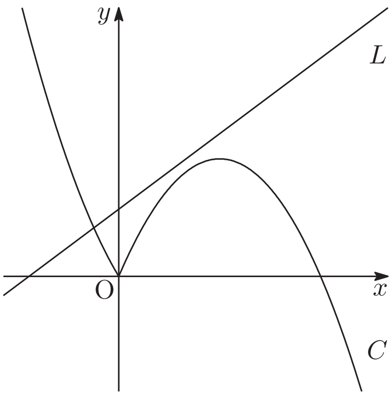
v) $0 < a < 1$ のとき



vi) $a = 1$ のとき



vii) $1 < a$ のとき



よって，求める共有点の個数 $N(a)$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -\dfrac{7}{2},\ 1 < a\ \text{のとき}} & \boldsymbol{N(a) = 1} \\ \boldsymbol{a = -\dfrac{7}{2},\ 0,\ 1\ \text{のとき}} & \boldsymbol{N(a) = 2} \\ \boldsymbol{-\dfrac{7}{2} < a < 0,\ 0 < a < 1\ \text{のとき}} & \boldsymbol{N(a) = 3} \end{cases}$$

[Ⅲ]

O を原点とする座標平面における放物線 $C : y^2 = 4px$ $(p > 0)$ に対して，C の焦点を F，C 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\alpha^2}{4p},\ \alpha\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\beta^2}{4p},\ \beta\right)$（ただし，$\alpha < 0 < \beta$）における 2 接線も交点を P とする。$C$ と 2 直線 AF，BF で囲まれる部分の面積を S，C と 2 直線 AP，BP で囲まれる部分の面積を T とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　S を α，β，p を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　T を α，β，p を用いて表せ。答えのみでよい。

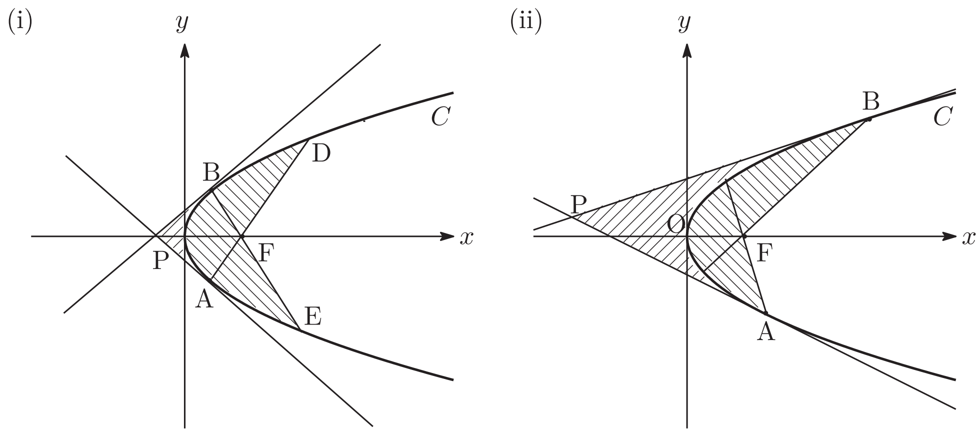
問 3　$S = T$ が成り立つとき，$-\dfrac{\beta}{\alpha}$ がとり得る値の範囲を求めよ。

解答

問 1　「曲線 C と 2 直線 AF，BF で囲まれる部分」を

「曲線 C と直線 AF で囲まれる部分」と「曲線 C と直線 BF で囲まれる部分」の和集合

と解釈する。



直線 AB の方程式は

$$x = \frac{1}{4p}(\alpha+\beta)y - \frac{1}{4p}\alpha\beta$$

直線 AB と x 軸の交点は $\left(-\dfrac{1}{4p}\alpha\beta,\ 0\right)$ であり，

これと焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ の位置関係で場合分けする。

(i) $-\dfrac{1}{4p}\alpha\beta < p \Longleftrightarrow \alpha\beta > -4p^2$ のとき

直線 AF と曲線 C の交点のうち A と異なる方を D とすると，D の y 座標は $y_{\mathrm{D}} = -\dfrac{4p^2}{\alpha}$

直線 BF と曲線 C の交点のうち A と異なる方を E とすると，E の y 座標は $y_{\mathrm{E}} = -\dfrac{4p^2}{\beta}$

このとき

$$\begin{aligned}
S &= \int_{y_{\mathrm{E}}}^{y_{\mathrm{D}}} \left\{-\frac{1}{4p}(y-y_{\mathrm{D}})(y-y_{\mathrm{E}})\right\} dy - \frac{1}{2}(y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{E}})\left(-\frac{4p^3}{\alpha\beta}-p\right) \\
&= -\frac{1}{4p}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{E}})^3 - \frac{1}{2}(y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{E}})\left(-\frac{4p^3}{\alpha\beta}-p\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{3}p^5\frac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^3\beta^3} - \frac{2p^3}{\alpha^2\beta^2}(\beta-\alpha)\left(4p^2+\alpha\beta\right)}
\end{aligned}$$

(ii) $-\dfrac{1}{4p}\alpha\beta \geqq p \iff \alpha\beta \leqq -4p^2$ のとき

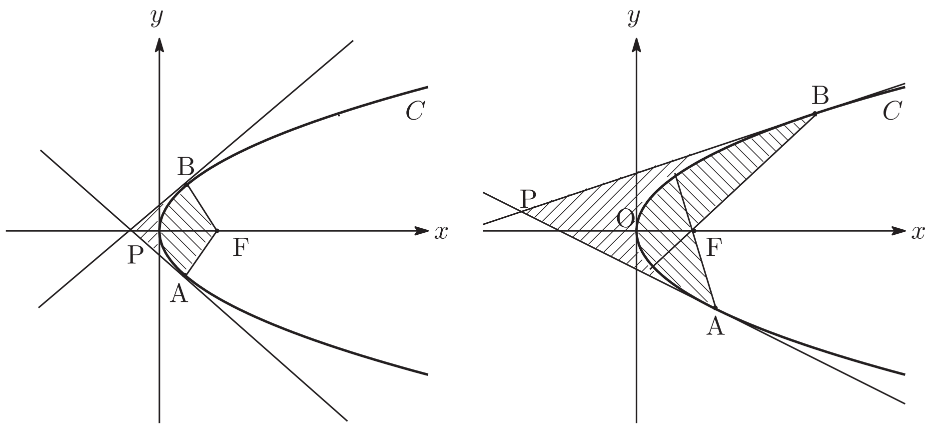
2 点 A，B の y 座標をそれぞれ y_{A}，y_{B} として

$$\begin{aligned}
S &= \int_{y_{\mathrm{A}}}^{y_{\mathrm{B}}} \left\{-\frac{1}{4p}(y-y_{\mathrm{A}})(y-y_{\mathrm{B}})\right\} dy - \frac{1}{2}(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})\left(-\frac{1}{4p}\alpha\beta - p\right) \\
&= -\frac{1}{4p}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{4p}\alpha\beta + p\right) \\
&= \frac{1}{24p}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{8p}(\beta-\alpha)(\alpha\beta+4p^2) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24p}(\beta^3-\alpha^3) + \frac{1}{2}p(\beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

(補足)　曲線 C と「線分」AF，BF で囲まれた部分の面積を S とおくと共に

$$S = \frac{1}{24p}(\beta^3-\alpha^3) + \frac{1}{2}p(\beta-\alpha)$$

と得られる。



問 2　P の y 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である。

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{1}{4p}(y-\alpha)^2 dy + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{1}{4p}(y-\beta)^2 dy \\
&= \frac{1}{4p}\left[\frac{(y-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{4p}\left[\frac{(y-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3}
\end{aligned}$$

問 3　$\alpha\beta > -4p^2$ のときは明らかに $S > T$ であるから，

$\alpha\beta \leqq -4p^2$ のときを考える。

$S = T$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24p}(\beta^3-\alpha^3) + \frac{1}{2}p(\beta-\alpha) = \frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^3 \\
&\frac{1}{24p}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2) + \frac{1}{2}p = \frac{1}{48p}(\beta-\alpha)^2 \qquad (\because\ \beta-\alpha \fallingdotseq 0) \\
&\frac{1}{24p}(x^2-x+1) + \frac{p}{2\alpha^2} = \frac{1}{48p}(-x-1)^2 \qquad \left(-\frac{\beta}{\alpha} = x \text{ とおいた}\right)
\end{aligned}$$

$$2(x^2-x+1)+\frac{24p^2}{\alpha^2}=x^2+2x+1$$
$$\frac{24p^2}{\alpha^2}=-x^2+4x-1$$

$\dfrac{24p^2}{\alpha^2}>0$ より

$$x^2-4x+1<0$$
$$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{2-\sqrt{3}<-\frac{\beta}{\alpha}<2+\sqrt{3}}$$

[IV]

a，b を正の定数とする。xy 平面上の 2 つの曲線 C_1：$y = e^{x^2}$ $(x > 0)$，C_2：$y = a\log x + b$ $(x > 0)$ に対して，C_1 と C_2 はただ一つの共有点 $\left(\alpha,\ e^{\alpha^2}\right)$ $(0 < \alpha < 1)$ をもつとする。また，曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x = \alpha^{\frac{3}{2}}$ で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V(\alpha)$ とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　a，b を α を用いて表せ。

問 2　$V(\alpha)$ を α のみを用いて表せ。

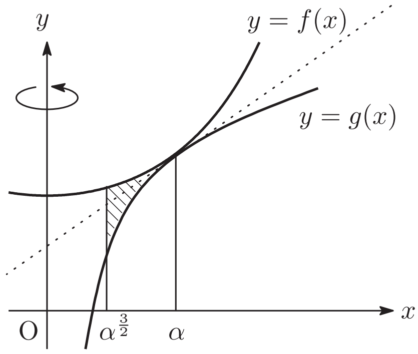
問 3　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{t^3}{6} \leqq e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \leqq 0$$

問 4　極限 $\displaystyle\lim_{\alpha \to +0} \frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$ が存在し，かつその極限値が正となるような正の定数 c の値を求めよ。また，そのときの極限値を答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$ であることを証明なしに用いてよい。

解答

問 1



$f(x) = e^{x^2}$，$g(x) = a\log x + b$ とする。

$f''(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} > 0$ より曲線 C_1 は下に凸であり，

$g''(x) = -\dfrac{a}{x^2} < 0$ より曲線 C_2 は上に凸であることを踏まえると，

2 曲線 C_1 と C_2 がただ 1 つの共有点をもつのは，

上の図のように，共有点において 2 曲線の接線が一致するときである。(補足 1 参照)

$$f'(x) = 2xe^{x^2},\ g'(x) = \frac{a}{x}$$

より，条件は

$$\begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} e^{\alpha^2} = a\log\alpha + b \\ 2\alpha e^{\alpha^2} = \dfrac{a}{\alpha} \end{cases}$$

これらより，

$$\boldsymbol{a = 2\alpha^2 e^{\alpha^2},\ b = e^{\alpha^2} - 2\alpha^2 e^{\alpha^2}\log\alpha}$$

問 2　バームクーヘン分割（補足 2 参照）を用いて立式すると

$$
\begin{aligned}
V(\alpha) &= \int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha} 2\pi x \left\{f(x) - g(x)\right\} dx \\
&= \int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha} 2\pi \left(xe^{x^2} - ax\log x - bx\right) dx \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{4}a\left(2x^2\log x - x^2\right) - \frac{1}{2}bx^2\right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha} \\
&= \pi \left\{e^{\alpha^2} - e^{\alpha^3} - \frac{1}{2}a\left(2\alpha^2\log\alpha - 3\alpha^3\log\alpha + \alpha^2 - \alpha^3\right) - b\left(\alpha^2 - \alpha^3\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ここへ，問 1 の結果を代入して，整理すると

$$
\boldsymbol{V(\alpha) = \pi\left\{\left(1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \alpha^5\log\alpha\right)e^{\alpha^2} - e^{\alpha^3}\right\}}
$$

問 3　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&-\frac{t^3}{6} \leqq e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \leqq 0 \\
\therefore\quad &-\frac{t^3}{6}e^t \leqq 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t \leqq 0
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示す。

$$
\begin{aligned}
F(t) &= 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t + \frac{t^3}{6}e^t \\
&= 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right)e^t
\end{aligned}
$$

とする。

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right)e^t \\
&= \frac{t^3}{6}e^t \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，$0 \leqq t \leqq 1$ において $F(t)$ は単調増加であり，
$F(0) = 0$ も合わせると $F(t) \geqq 0$ である。

$$
\begin{aligned}
G(t) &= 0 - \left\{1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t\right\} \\
&= \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t - 1
\end{aligned}
$$

とする。

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= (-1 + t)e^t + \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t \\
&= \frac{t^2}{2}e^t \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，$0 \leqq t \leqq 1$ において $G(t)$ は単調増加であり，
$G(0) = 0$ も合わせると $G(t) \geqq 0$ である。

以上により，示された。

問 4　問 2 より

$$V(\alpha)=\pi\left\{\left(1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha\right)-e^{\alpha^3-\alpha^2}\right\}e^{\alpha^2}\ \cdots\cdots①$$

問 3 より，$0\leqq t\leqq 1$ において

$$1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\leqq e^{-t}\leqq 1-t+\frac{t^2}{2}$$

が成り立つ。$t=\alpha^2-\alpha^3$ とすると，$\left(0<\alpha<1 \text{ より},\ 0<\alpha^2-\alpha^3<1\right)$

$$1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2-\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha^3)^3\leqq e^{\alpha^3-\alpha^2}\leqq 1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2$$

が成り立つので，①と併せて

$$\begin{aligned}
&\pi\left\{(1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha)-\left(1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2\right)\right\}e^{\alpha^2}\leqq V(\alpha)\\
&\qquad\leqq\pi\left\{(1-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^5\log\alpha)-\left(1-(\alpha^2-\alpha^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^3)^2-\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha^3)^3\right)\right\}e^{\alpha^2}\\
&\pi\left(\frac{1}{2}\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^6+\alpha^5\log\alpha\right)e^{\alpha^2}\leqq V(\alpha)\leqq\pi\left\{\frac{1}{2}\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^6+\alpha^5\log\alpha+\frac{1}{6}(\alpha^2-\alpha^3)^3\right\}e^{\alpha^2}\\
&\pi\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^6+\alpha^5\log\alpha}{\alpha^c}\right)e^{\alpha^2}\leqq\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}\leqq\pi\left\{\frac{\frac{1}{2}\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^6+\alpha^5\log\alpha+\frac{1}{6}\alpha^6(1-\alpha)^3}{\alpha^c}\right\}e^{\alpha^2}\\
\therefore\ &\pi\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha\log\alpha}{\alpha^{c-4}}\right)e^{\alpha^2}\leqq\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}\leqq\pi\left\{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha\log\alpha+\frac{1}{6}\alpha^2(1-\alpha)^3}{\alpha^{c-4}}\right\}e^{\alpha^2}\cdots\cdots②
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\alpha\log\alpha=0$ であることと併せて

$$\begin{cases}
4<c \text{ のとき}, & (②\text{の左辺})\to\infty \text{ より } \dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}\to\infty\quad(\alpha\to+0)\\
c=4 \text{ のとき}, & (②\text{の左辺})\to\dfrac{\pi}{2},\ (②\text{の右辺})\to\dfrac{\pi}{2} \text{ より } \dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}\to\dfrac{\pi}{2}\quad(\alpha\to+0)\\
0<c<4 \text{ のとき}, & (②\text{の左辺})\to 0,\ (②\text{の右辺})\to 0 \text{ より } \dfrac{V(\alpha)}{\alpha^c}\to 0\quad(\alpha\to+0)
\end{cases}$$

となるので，$\displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$ が存在し，かつその極限値が正となるのは，$\boldsymbol{c=4,\ \displaystyle\lim_{\alpha\to+0}\frac{V(\alpha)}{\alpha^4}=\frac{\pi}{2}}$

(補足 1)

$$\begin{aligned}
&C_1 \text{ と } C_2 \text{ の共有点がただ 1 つある。}\\
\Longleftrightarrow\ &f(x)=g(x)\ (x>0) \text{ の解がただ 1 つある。}\\
\Longleftrightarrow\ &f(x)-g(x)=0\ (x>0) \text{ の解がただ 1 つある。}
\end{aligned}$$

である。$h(x)=f(x)-g(x)$（$x>0$）とする。

$$h'(x)=2xe^{x^2}-\frac{a}{x}$$
$$h'(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}+\frac{a}{x^2}>0$$

より，$h'(x)$ は単調増加であり，$\lim_{x\to+0} h'(x) = -\infty$ と $\lim_{x\to\infty} h'(x) = \infty$ を

あわせると、$h'(x)=0$ となる $x\ (>0)$ がただ 1 つ存在し（これを $x=\beta$ とする），

$h(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

さらに，$\lim_{x\to+0} h(x) = \infty$ と $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ を併せれば,

$h(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在するのは $h(\beta)=0$ のときである。

このとき，$\alpha=\beta$ であるから

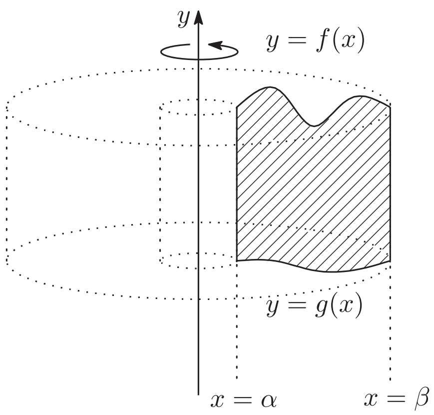
$$\begin{cases} h(\alpha)=0 \\ h'(\alpha)=0 \end{cases} \qquad \therefore \ \begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

を満たすこととなり，解答と同様となる。

(補足 2)　問 2 の $V(\alpha)$ の立式は次の公式を用いている（いわゆる「バウムクーヘン分割」)。

下図の斜線部分を y 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_y は

$$V_y = \int_\alpha^\beta 2\pi x|f(x)-g(x)|\ dx$$



(補足 3)　問 2 で y 軸に垂直に細分する方法で $V(\alpha)$ を立式すると

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \int_{\frac{3}{2}a\log\alpha+b}^{e^{\alpha^2}} \pi x^2 dy - \int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}} \pi x^2 dy - \pi\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left\{e^{\alpha^3} - \left(\frac{3}{2}a\log\alpha+b\right)\right\} \\ &= \int_{\frac{3}{2}a\log\alpha+b}^{e^{\alpha^2}} \pi\left(e^{\frac{y-b}{a}}\right)^2 dy - \int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}} \pi\log y\ dy - \pi\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left\{e^{\alpha^3} - \left(\frac{3}{2}a\log\alpha+b\right)\right\} \end{aligned}$$

であり，こちらを計算しても (当然ながら) 同じ結果となる。

講評

[I]［確率］(やや易)
　設定がしっかりと読めれば確実に点数が取れる。一次突破のためにはここは落とせない。

[II]［2 次関数，微分法］(標準)
　問 1 問 2 は教科書レベルの問題である。問 3 の図形的考察がやや複雑だが，完答を目指したいところ。[I][II] で時間をかけずに，[III][IV] に時間を割いていきたい。

[III]［数 II 積分法の応用］(難)
　問 1 の面積 S を求める際の問題設定の解釈が難しい。とまどった受験生も多いのではないだろうか。補足も参照してほしい。問 3 はやや見慣れない形の存在条件を考えるさせる問題であり，完答までたどり着くのは難しいだろう。

[IV]［積分法の応用，極限］(やや難)
　考え方は標準的であるが計算量が多く，完答は難しいだろう。特に問 4 は時間内での計算が厳しいので，問 3 まで確実に解き切れば十分だろう。

　全体的な難易度，計算量は例年と大きく変わらなかった。[I] の出題形式が昨年度から変更となったが，ほかに大きな変更点は見られなかった。[I][II] で完答を目指し，[III][IV] でとれるところで点数を稼いでいきたい。目標は 55%。