医学部専門予備校 YMS × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2021年 2月19日実施

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1)　点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC において

$$-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

が成り立っているとする。また直線 OA と直線 BC の交点を P とする。このとき線分 BC，OP の長さを求めると BC = $\boxed{\text{(あ)}}$，OP = $\boxed{\text{(い)}}$ である。さらに三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{(う)}}$ である。

(2)　$0<\alpha<1$，$m>0$ とする。曲線 $y=x^{\alpha}-mx$ $(x \geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸の回りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。m を固定して $\alpha \to +0$ とするときの V の極限値を m の式で表すと，$\displaystyle\lim_{\alpha \to +0} V=\boxed{\text{(え)}}$ となる。また，α を固定して $m \to \infty$ とするとき m^3V が 0 でない数に収束するならば，$\alpha=\boxed{\text{(お)}}$ である。

(3)　整数 k に対して，x の 2 次方程式 $x^2+kx+k+35=0$ の解を α_k，β_k とおく。ただし，方程式が重解をもつときは $\alpha_k=\beta_k$ である。また

$$U=\{k \mid k \text{ は整数, かつ } |k| \leqq 100\}$$

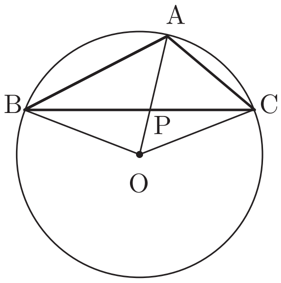
を全体集合とし，その部分集合

$$A=\{k \mid k \in U \text{ かつ} \alpha_k,\ \beta_k \text{はともに実数で} \alpha_k \neq \beta_k\},$$
$$B=\{k \mid k \in U \text{ かつ} \alpha_k,\ \beta_k \text{の実部はともに 2 より大きい}\},$$
$$C=\{k \mid k \in U \text{ かつ} \alpha_k,\ \beta_k \text{の実部と虚部はすべて整数}\},$$

を考える。このとき $n(A)=\boxed{\text{(か)}}$，$n(A\cap B)=\boxed{\text{(き)}}$，$n(\overline{A}\cap B)=\boxed{\text{(く)}}$，$n(A\cap C)=\boxed{\text{(け)}}$，$n(\overline{A}\cap C)=\boxed{\text{(こ)}}$ である。ただし有限集合 X に対してその要素の個数を $n(X)$ で表す。また，$\overline{A}$ は A の補集合である。

解答

(1)



条件より，

$$-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \cdots\cdots ①$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1 \ \cdots\cdots②$$

①より，

$$7\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 8\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 5\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\left|7\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 8\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = 25\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$49\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + 112\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 64\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = 25\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{11}{14} \ \cdots\cdots① \qquad (\because\ ②)$$

である。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= 2 - 2\left(-\frac{11}{14}\right) \\ &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$
$$\therefore\ \mathrm{BC} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{7}}$$

また①より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= 3\left(\frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{8}{15}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \\ &= 3\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

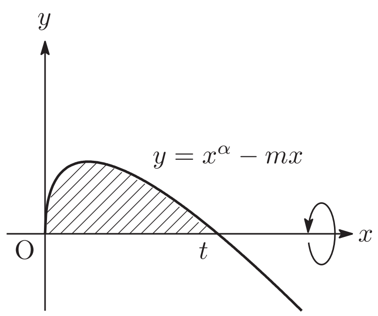
であるから，O は線分 OA を 1 : 2 に内分する点であり

$$\mathrm{OP} = \frac{1}{3}\mathrm{OA} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

さらに，面積比は $\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{OBC} = \mathrm{AP} : \mathrm{PO} = 2 : 1$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= 2\times\triangle\mathrm{OBC} \\ &= 2\times\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1^2\cdot1^2 - \left(-\frac{11}{14}\right)^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{14}}\end{aligned}$$

(2)



曲線 $y = x^{\alpha} - mx$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned}
&x^{\alpha} - mx = 0 \\
&x^{\alpha}(1 - mx^{1-\alpha}) = 0 \\
\therefore\ \ &x = 0,\ \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\ \ (= t \text{ とおく})
\end{aligned}$$

したがって，体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^t \pi(x^{\alpha} - mx)^2 dx \\
&= \pi \int_0^t (x^{2\alpha} - 2mx^{1+\alpha} + m^2x^2)dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1} - \frac{2m}{\alpha+2}x^{\alpha+2} + \frac{m^2}{3}x^3\right]_0^t \\
&= \pi \left\{\frac{1}{2\alpha+1}t^{2\alpha+1} - \frac{2m}{\alpha+2}t^{\alpha+2} + \frac{m^2}{3}t^3\right\} \cdots\cdots ① \\
&= \pi \left\{\frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2\alpha+1}{1-\alpha}} - \frac{2m}{\alpha+2}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{\alpha+2}{1-\alpha}} + \frac{m^2}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{1-\alpha}}\right\}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to +0} V &= \pi \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{m^2}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^3\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{3m}}
\end{aligned}$$

また，$m = t^{\alpha-1}$ であるから①より

$$\begin{aligned}
m^3V &= \pi t^{3\alpha-3}\left\{\frac{1}{2\alpha+1}t^{2\alpha+1} - \frac{2t^{\alpha-1}}{\alpha+2}t^{\alpha+2} + \frac{t^{2\alpha-2}}{3}t^3\right\} \\
&= \pi \left(\frac{1}{2\alpha+1}t^{5\alpha-2} - \frac{2}{\alpha+2}t^{5\alpha-2} + \frac{1}{3}t^{5\alpha-2}\right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{2\alpha+1} - \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{3}\right)t^{5\alpha-2} \\
&= \frac{2(1-\alpha)^2\pi}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}t^{5\alpha-2}
\end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$ より $m \to \infty$ のとき $t \to +0$ であるから

$$\lim_{m \to \infty} m^3V = \lim_{t \to +0} t^{3\alpha-3}V = \begin{cases} 0 & \left(\dfrac{2}{5} < \alpha < 1 \text{ のとき}\right) \\ \dfrac{\pi}{18} & \left(\alpha = \dfrac{2}{5} \text{ のとき}\right) \\ \infty & \left(0 < \alpha < \dfrac{2}{5} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

よって，$\displaystyle\lim_{m \to \infty} m^3V$ が 0 でない値に収束するときの α の値は $\boldsymbol{\alpha = \dfrac{2}{5}}$

(3)　$x^2+kx+k+35=0$ ……① の判別式を D とすると

$$D=k^2-4(k+35)=(k+10)(k-14)$$

であるので，

$$\begin{cases} D>0 \iff k<-10,\ 14<k \\ D=0 \iff k=-10,\ 14 \\ D<0 \iff -10<k<14 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} D>0 \iff k \leqq -11,\ 15 \leqq k \\ D=0 \iff k=-10,\ 14 \\ D<0 \iff -9 \leqq k \leqq 13 \end{cases}$$

である。したがって，

$$A=\{k \mid -100 \leqq k \leqq -11,\ 15 \leqq k \leqq 100\}$$

より

$$n(A)=\{-11-(-100)+1\}+(100-15+1)=\mathbf{176}$$

また，$D>0$，すなわち①が異なる 2 実数解をもつとき，その 2 実数解 (の実部) がともに 2 より大きいときを考える。①の左辺を $f(x)$ すると，$y=f(x)$ の軸が $x=-\dfrac{k}{2}$ より，その条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{k}{2}>2 \\ f(2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} k<-4 \\ k>-13 \end{cases} \iff -13<k<-4 \qquad \therefore\ -12 \leqq k \leqq -5$$

である。したがって，

$$A \cap B=\{k \mid k=-12,\ -11\}$$

より

$$n(A \cap B)=\mathbf{2}$$

続いて，$D \leqq 0$，すなわち①が重解または 2 虚数解をもつとき，重解 (の実部)，2 虚数解の実部は $-\dfrac{k}{2}$ であることから，$D \leqq 0$ かつ $|k| \leqq 100 \iff -10 \leqq k \leqq 14$ を満たす整数 k のうち，実部がともに 2 より大きくなる場合を考えて

$$\overline{A} \cap B=\{k \mid -10 \leqq k \leqq -5\}$$

より

$$n(\overline{A} \cap B)=-5-(-10)+1=\mathbf{6}$$

ここで，$D>0$，すなわち①が 2 実数解をもつとき，その 2 実数解 (の実部) がともに整数であるときを考える（このとき，虚部は 0 であるから整数である)。 $\cdots\cdots(*)$
①から，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha_k+\beta_k = -k \\ \alpha_k\beta_k = k+35 \end{cases}$$

k を消去して，整理すると

$$\alpha_k\beta_k+\alpha_k+\beta_k=35 \iff (\alpha_k+1)(\beta_k+1)=36$$

$\alpha_k < \beta_k$ としても一般性を失わないので

$$\begin{aligned}(\alpha_k+1,\ \beta_k+1) &= (1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (-36,\ -1),\ (-18,\ -2),\ (-12,\ -3),\ (-9,\ -4)\\ \iff (\alpha_k,\ \beta_k) &= (0,\ 35),\ (1,\ 17),\ (2,\ 11),\ (3,\ 8),\ (-37,\ -2),\ (-19,\ -3),\ (-13,\ -4),\ (-10,\ -5)\end{aligned}$$

k をそれぞれ求めると

$$k = -35,\ -18,\ -13,\ -11,\ 39,\ 22,\ 17,\ 15$$

であり，これは $D > 0$ かつ $|k| \leqq 100 \iff -100 \leqq k \leqq -11,\ 15 \leqq k \leqq 100$ を満たす。したがって，

$$A \cap C = \{k \mid k = -35,\ -18,\ -13,\ -11,\ 39,\ 22,\ 17,\ 15\}$$

より

$$n(A \cap C) = \mathbf{8}$$

続いて，$D \leqq 0$，すなわち①が重解または 2 虚数解をもつとき，重解 (の実部)，2 虚数解の実部は $-\dfrac{k}{2}$ であり，虚部は $\pm\dfrac{\sqrt{-k^2+4k+140}}{2}$ である。以下，$D \leqq 0$ かつ $|k| \leqq 100 \iff -10 \leqq k \leqq 14$ を満たす整数 k のうち，実部，虚部がすべて整数となる場合を考える。
まず，実部が整数であることより，k は偶数である。また，虚部が整数であることより，整数 m を用いて

$$\begin{aligned}&\pm\frac{\sqrt{-k^2+4k+140}}{2} = m\\ \iff &\pm\sqrt{-k^2+4k+140} = 2m\\ \iff &-k^2+4k+140 = (2m)^2\\ \iff &(k-2)^2+(2m)^2 = 144\end{aligned}$$

これを満たす整数 k は

$$k-2 = -12,\ 0,\ 12 \iff k = -10,\ 2,\ 14$$

であり，これは k が偶数であることを満たす。したがって，

$$\overline{A} \cap C = \{k \mid k = -10,\ 2,\ 14\}$$

より

$$n(\overline{A} \cap C) = \mathbf{3}$$

(参考)　$(*)$ は次のように考えてもよい。

まず，①が異なる 2 つの有理数解をもつ条件を考えると，整数 $l \geqq 1$ を用いて

$$\begin{aligned}D = n^2 &\iff k^2-4(k+35) = l^2\\ &\iff (k-2)^2-l^2 = 144\\ &\iff (k-2-l)(k-2+l) = 144\end{aligned}$$

$k-2-l<k-2+l$，$k-2-l$ と $k-2+l$ の偶奇が一致することに注意すると，

$$\begin{aligned}(k-2-l,\ k-2+l) &= (2,\ 72),\ (4,\ 36),\ (6,\ 24),\ (8,\ 18),\ (-72,\ -2),\ (-36,\ -4),\ (-24,\ -6),\ (-18,\ -8)\\ \Longleftrightarrow \quad (k,\ l) &= (39,\ 35),\ (22,\ 16),\ (17,\ 9),\ (15,\ 5),\ (-35,\ 35),\ (-18,\ 16),\ (-13,\ 9),\ (-11,\ 3)\end{aligned}$$

であり，これは $D>0$ かつ $|k| \leqq 100 \iff -100 \leqq k \leqq -11,\ 15 \leqq k \leqq 100$ を満たす。また，①の実数解は $x=\dfrac{-k \pm l}{2}$ と表せることより，どの $(k,\ l)$ の組も①の 2 実数解はともに整数となる。したがって，

$$A \cap C=\{k \mid k=-35,\ -18,\ -13,\ -11,\ 39,\ 22,\ 17,\ 15\}$$

より

$$n(A \cap C)=\mathbf{8}$$

［Ⅱ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし (あ)，(い)，(う) には n の整式を，(え) には $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$ の式を入れること。また，設問 (2) に答えなさい。

n 人のクラス（ただし $n>1$）で英語と理科のテストを実施する。ただしどちらの科目にも同順位の者はいないとする。出席番号 i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）の生徒について，その英語の順位 x と理科の順位 y の組を $(x_i,\ y_i)$ で表す。

(1)　変量 x の平均値 $\overline{x}$ と分散 ${s_x}^2$ をそれぞれ求めると $\overline{x}=\boxed{\text{(あ)}}$，${s_x}^2=\boxed{\text{(い)}}$ である。

(2)　変量 x，y の共分散 s_{xy} とする。クラスの人数 n が奇数の 2 倍であるとき，$s_{xy}\fallingdotseq 0$ となることを示しなさい。

(3)　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して $d_i=x_i-y_i$ とおく。変量 x，y の相関係数を r とするとき，r は n と $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$ を用いて

$$r=1-\frac{6}{\boxed{\text{(う)}}}\boxed{\text{(え)}}$$

と表される。

(4)　x_i と y_i の間に $y_i=\boxed{\text{(お)}}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）の関係があるとき r は最大値 $\boxed{\text{(か)}}$ をとり，$y_i=\boxed{\text{(き)}}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）の関係があるとき r は最小値 $\boxed{\text{(く)}}$ をとる。

解答

(1)
$$\begin{cases} x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n \end{cases}$$

はいずれも $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を並び替えたものであるから

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} y_i=\frac{1}{2}n(n+1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2=\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{cases}$$

である。よって，変量 x の平均 $\overline{x}$ と分散 ${s_x}^2$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)}$$

$${s_x}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2=\boldsymbol{\frac{1}{12}(n^2-1)}$$

(2)　$n=2(2m-1)=4m-2$（m は自然数）とおける。変量 x，y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\left(\overline{x}\right)^2\right\} \qquad (\because\ \overline{y}=\overline{x}) \\ &= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\cdot\frac{1}{4}(n+1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{4m-2} x_i y_i - (4m-2)\cdot\frac{1}{4}(4m-1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{4m-2} x_i y_i - \frac{1}{2}(2m-1)(4m-1)^2\right\} \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である。ここで，

$$\sum_{i=1}^{4m-2} x_i y_i \text{ は整数，} \frac{1}{2}(2m-1)(4m-1)^2 \text{ は整数でない}$$

であるから，①の $\{\quad\} \fallingdotseq 0$ である。
よって，$s_{xy} \fallingdotseq 0$ がなりたつ。

(3)　条件より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 - 2x_i y_i + {y_i}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n}{y_i}^2 \\ &= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \left(\because\ \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n}{y_i}^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2\right\} - \frac{1}{4}(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{12}(n^2-1) - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2 \end{aligned}$$

である。よって，

$$\begin{aligned} r &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \\ &= \frac{\frac{1}{12}(n^2-1) - \frac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2}{\frac{1}{12}(n^2-1)} \qquad (\because\ s_y = s_x) \\ &= \boldsymbol{1 - \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2} \end{aligned}$$

(4)　r が最大値 1 をとるのは $(x_i,\ y_i)$ が傾き正の直線上に並ぶときであるが，それは $y_i = x_i$（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）のときである。

また，r が最大値 -1 をとるのは $(x_i,\ y_i)$ が傾き負の直線上に並ぶときであるが，それは $y_i = n + 1 - x_i$（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）のときである。

よって，相関係数 r は

$\boldsymbol{y_i = x_i}$（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）のとき最大値 **1** をとり，

$\boldsymbol{y_i = n + 1 - x_i}$（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）のとき最小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

水平な平面上の異なる 2 点 A$(0,\ 1)$，Q$(x,\ y)$ にそれぞれ高さ $h>0$，$g>0$ の塔が平面に垂直に立っている。この平面上にあって A，Q とは異なる点 P から 2 つの塔の先端を見上げる角度が等しくなる状況を考える。ただし，以下の設問を通して $h \fallingdotseq g$ とする。

(1) 点 Q の座標が $(T,\ 1)$（ただし，$T>0$）のとき，2 つの塔を見上げる角度が等しくなるような点 P は，中心の座標が $\left(\boxed{（あ）},\ \boxed{（い）}\right)$，半径が $\boxed{（う）}$ の円周上にある。

(2) 2 つの塔を見上げる角度が等しくなるような点 P のうち，y 軸上にあるものがただ 1 つであるとする。このとき h と g の間には不等式 $\boxed{（え）}$ が成り立ち，点 Q$(x,\ y)$ は 2 直線 $y=\boxed{（お）}$，$y=\boxed{（か）}$ のいずれかの上にある。

(3) 2 つの塔を見上げる角度が等しくなるような点 P のうち，x 軸上にあるものがただ 1 つであるとする。このとき点 Q$(x,\ y)$ は方程式

$$\boxed{（き）}x^2+\boxed{（く）}x+\boxed{（け）}y^2+\boxed{（こ）}y=1$$

で表される 2 次曲線 C の上にある。C が楕円であるのは h と g の間に不等式 $\boxed{（さ）}$ が成り立つときであり，そのとき C の 2 つの焦点の座標は $\left(\boxed{（し）},\ \boxed{（す）}\right)$，$\left(\boxed{（せ）},\ \boxed{（そ）}\right)$ である。$\boxed{（さ）}$ が成り立たないとき C は双曲線となり，その 2 つの焦点の座標は $\left(\boxed{（た）},\ \boxed{（ち）}\right)$，$\left(\boxed{（つ）},\ \boxed{（て）}\right)$ である。さらに $\dfrac{h}{g}=\boxed{（と）}$ のとき C は直角双曲線となる。

解答

高さ h，g の塔の先端をそれぞれ A$'$，Q$'$ とする。このとき，$\triangle \mathrm{APA'} \backsim \triangle \mathrm{QPQ'}$ であるので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AA'}=\mathrm{QP}:\mathrm{QQ'} \iff g\mathrm{AP}=h\mathrm{QP} \iff g^2\mathrm{AP}^2=h^2\mathrm{QP}^2 \ \cdots\cdots ①$$

(1) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，$\mathrm{AP}^2=X^2+(Y-1)^2$，$\mathrm{QP}^2=(X-T)^2+(Y-1)^2$ なので，① より

$$g^2\{X^2+(Y-1)^2\}=h^2\{(X-T)^2+(Y-1)^2\}$$

$$\iff (h^2-g^2)X^2-2h^2TX+(h^2-g^2)Y^2+2(g^2-h^2)Y+h^2T^2+h^2-g^2=0$$

$$\iff X^2-\frac{2h^2T}{h^2-g^2}X+Y^2-2Y+\frac{h^2T^2+h^2-g^2}{h^2-g^2}=0$$

$$\iff \left(X-\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\left(\frac{ghT}{h^2-g^2}\right)^2$$

よって，点 P は，中心の座標が $\left(\boldsymbol{\dfrac{h^2T}{h^2-g^2},\ 1}\right)$，半径が $\left|\dfrac{ghT}{h^2-g^2}\right|=\boldsymbol{\dfrac{ghT}{|h^2-g^2|}}$ の円周上にある。

(2) $\mathrm{P}(0,\ p)$（p は任意の実数）とすると，$\mathrm{AP}=|p-1|$，$\mathrm{QP}^2=x^2+(y-p)^2$ なので，① より

$$g^2(p-1)^2=h^2\{x^2+(y-p)^2\}$$

$$\iff (h^2-g^2)p^2-2(h^2y-g^2)p+h^2x^2+h^2y^2-g^2=0 \ \cdots\cdots ②$$

$h^2-g^2 \fallingdotseq 0$ より，② の判別式を D_y とすると，p がただ 1 つであるための条件は

$$\begin{aligned}\frac{D_y}{4}=0 &\iff (h^2y-g^2)^2-(h^2-g^2)(h^2x^2+h^2y^2-g^2)=0\\ &\iff (h^2-g^2)x^2-g^2y^2+2g^2y-g^2=0\\ &\iff (h^2-g^2)x^2-g^2(y-1)^2=0\\ &\iff g^2(y-1)^2=(h^2-g^2)x^2\end{aligned}$$

このような実数 x，y が存在するためには，不等式 $h^2-g^2>0 \iff \boldsymbol{h>g}$（$\because h>0,\ g>0$）が必要であり，このとき，点 Q は直線

$$g(y-1)=\pm\sqrt{h^2-g^2}x \iff \boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1}$$

のいずれかの上にある。

(3) P$(q,\ 0)$（q は任意の実数）とすると，$\mathrm{AP}^2=q^2+1$，$\mathrm{QP}^2=(x-q)^2+y^2$ なので，① より

$$\begin{aligned}&g^2(q^2+1)=h^2\{(x-q)^2+y^2\}\\ \iff &(h^2-g^2)q^2-2h^2xq+h^2x^2+h^2y^2-g^2=0 \ \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

$h^2-g^2 \fallingdotseq 0$ より，③ の判別式を D_x とすると，q がただ 1 つであるための条件は

$$\begin{aligned}\frac{D_x}{4}=0 &\iff (h^2x)^2-(h^2-g^2)(h^2x^2+h^2y^2-g^2)=0\\ &\iff h^2g^2x^2+h^2(g^2-h^2)y^2=g^2(g^2-h^2)\\ &\iff \boldsymbol{\frac{h^2}{g^2-h^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1} \ \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

したがって，等式④が楕円を表すならば，不等式 $g^2-h^2>0 \iff \boldsymbol{g>h}$（$\because h>0,\ g>0$）が成り立ち，このとき 2 次曲線 C は

$$\frac{x^2}{\frac{g^2-h^2}{h^2}}+\frac{y^2}{\frac{g^2}{h^2}}=1$$

と変形できるので，$\dfrac{g^2-h^2}{h^2}<\dfrac{g^2}{h^2}$ と併せて，焦点の座標は $\left(0,\ \pm\sqrt{\dfrac{g^2}{h^2}-\dfrac{g^2-h^2}{h^2}}\right)$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{(0,\ \pm1)}$

また，$g>h$ が成り立たない，すなわち $g<h$ が成り立つとき，等式④は双曲線を表し，このとき曲線 C は

$$\frac{x^2}{\frac{h^2-g^2}{h^2}}-\frac{y^2}{\frac{g^2}{h^2}}=-1$$

と変形できるので，焦点の座標は $\left(0,\ \pm\sqrt{\dfrac{h^2-g^2}{h^2}+\dfrac{g^2}{h^2}}\right)$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{(0,\ \pm1)}$

さらに曲線 C が直角双曲線を表すとき

$$\frac{h^2-g^2}{h^2}=\frac{g^2}{h^2} \iff \frac{h}{g}=\boldsymbol{\sqrt{2}} \quad (\because h>0,\ g>0)$$

となる。

(参考)　AP : QP$=h:g$（一定）であるので，アポロニウスの円 ······(∗) を利用して解くこともできる。計算量を大幅に減らすことができることも多いので，私立医学部受験生は押さえておきたい。

(∗)　2 点 A，B からの距離の比が $m:n$（$m>0$，$n>0$，$m \fallingdotseq n$）である点の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を結ぶ線分を直径とする円となる。なお，$m=n$ のときは直線となる。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$（$x > 0$）を C で表す。点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を中心とする半径 r の円が曲線 C と，点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$（ただし，$t > 0$）において共通の接線をもち，さらに $X < t$ であるとする。このとき X および Y を t の式で表すと

$$X = \boxed{(あ)},\ Y = \boxed{(い)}$$

となる。t の関数 $X(t)$, $Y(t)$ を $X(t) = \boxed{(あ)}$, $Y(t) = \boxed{(い)}$ により定義する。すべての $t > 0$ に対して $X(t) > 0$ となるための条件は，r が不等式 $\boxed{(う)}$ を満たすことである。$\boxed{(う)}$ が成り立たないとき，関数 $Y(t)$ は $t = \boxed{(え)}$ において最小値 $\boxed{(お)}$ をとる。また $\boxed{(う)}$ が成り立つとき，Y を X の関数と考えて，$\left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2 + 1$ を Y の式で表すと $\left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2 + 1 = \boxed{(か)}$ となる。

解答

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$（$x > 0$）とおく。このとき，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(t)}(x - t) + f(t)$$

となり，これが点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を通るので

$$Y = -\frac{1}{f'(t)}(X - t) + f(t) \iff Y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}(X - t) \ \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。また，$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = r^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ があるので

$$(t - X)^2 + \{f(t) - Y\}^2 = r^2 \ \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。①を②に代入して

$$\begin{aligned}(X - t)^2 + \frac{1}{\{f'(t)\}^2}(X - t)^2 = r^2 &\iff \frac{\{f'(t)\}^2 + 1}{\{f'(t)\}^2}(X - t)^2 = r^2 \\ &\iff \left\{\frac{f(t)}{f'(t)}\right\}^2 (X - t)^2 = r^2 \quad (\because 1 + \{f'(t)\}^2 = \{f(t)\}^2) \\ &\iff \frac{f(t)}{f'(t)}(X - t) = \pm r \\ &\iff X = t \pm \frac{f'(t)}{f(t)} r \quad \text{(複号同順)}\end{aligned}$$

$\dfrac{f'(t)}{f(t)} r > 0$ より，$X < t$ と併せて

$$X = t - \frac{f'(t)}{f(t)} r \iff X = \boldsymbol{t - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} r} \ \cdots\cdots ③$$

また，③を①に代入して

$$Y - f(t) = -\frac{1}{f'(t)}\left(-\frac{f'(t)}{f(t)} r\right) \iff Y = f(t) + \frac{1}{f(t)} r \iff Y = \boldsymbol{\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{2}{e^t + e^{-t}} r}$$

ここで，$X(t)=-\dfrac{f'(t)}{f(t)}r+t$，$Y(t)=f(t)+\dfrac{1}{f(t)}r$ である。

$$\begin{aligned} X(t)>0 &\iff -\frac{f'(t)}{f(t)}r+t>0 \\ &\iff r<\frac{tf(t)}{f'(t)} \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

となるので，④がすべての $t>0$ に対して成立するための条件を考える。
$g(t)=\dfrac{tf(t)}{f'(t)}$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\{tf'(t)+f(t)\}f'(t)-tf(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2} \\ &= \frac{f(t)f'(t)-t}{\{f'(t)\}^2} \quad (\because \{f'(t)\}^2-\{f(t)\}^2=-1) \end{aligned}$$

$h(t)=f(t)f'(t)-t$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(t) &= \{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)-1 \\ &= \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}-1 \end{aligned}$$

$e^{2t}>0$，$e^{-2t}>0$ から，相加平均・相乗平均の関係を用いて，$h'(t)\geqq\dfrac{2\sqrt{e^{2t}\cdot e^{-2t}}}{2}-1=0$（等号は $t=0$ のとき成立する）となるので，$t>0$ において $h'(t)>0$ である。したがって，$t>0$ において $h(t)$ は単調増加より $h(t)>\lim\limits_{t\to+0}h(t)=0$ となるので $g'(t)=\dfrac{h(t)}{\{f'(t)\}^2}>0$ が成立し，$t>0$ において $g(t)$ も単調増加である。
したがって

$$\lim_{t\to+0}g(t)=\lim_{t\to+0}\frac{t(e^{2t}+1)}{e^{2t}-1}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{e^{2t}+1}{2}}{\frac{e^{2t}-1}{2t}}=\frac{\frac{e^0+1}{2}}{1}=1$$

であることと併せて，④，すなわち $r<g(t)$ がすべての $t>0$ に対して成立するための条件は

$$\boldsymbol{0<r\leqq 1}$$

である。
ここで，$f(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ は，$e^t>0$，$e^{-t}>0$ から，相加平均・相乗平均の関係を用いて，$f(t)\geqq\dfrac{2\sqrt{e^t\cdot e^{-t}}}{2}=1$（等号は $t=0$ のとき成立する）であるので，$t>0$ において $f(t)>1$ である。
また，関数 $Y(t)$ において $f(t)=T$（$T>1$）とおいて，$Y(t)=\dfrac{r}{T}+T$ を T の関数として微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dT} &= -\frac{r}{T^2}+1 \\ &= \frac{(T-\sqrt{r})(T+\sqrt{r})}{T^2} \quad \cdots\cdots ⑤ \end{aligned}$$

となり，不等式 $0<r\leqq 1$ が成り立たないとき，すなわち $1<r$ のとき，$Y(t)$ の $T>1$ における増減は次のように

なる。

T	(1)	$\cdots$	$\sqrt{r}$	$\cdots$
$\dfrac{dY(t)}{dT}$		$-$	0	$+$
$Y(t)$		$\searrow$	$2\sqrt{r}$	$\nearrow$

$T=\sqrt{r}$ のとき，

$$T=\sqrt{r} \iff (e^t)^2-2\sqrt{r}e^t+1=0 \iff e^t=\sqrt{r}\pm\sqrt{r-1} \iff t=\log(\sqrt{r}\pm\sqrt{r-1})$$

となり，$1<r$ のとき $\sqrt{r}+\sqrt{r-1}>1$，$\sqrt{r}-\sqrt{r-1}=\dfrac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{r-1}}<1$ であるから，$t>0$ のとき $t=\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})$ である。

よって，関数 $Y(t)$ は $t=\boldsymbol{\log(\sqrt{r}+\sqrt{r-1})}$ において最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{r}}$ をとる。

また，$\dfrac{dX}{dt}=-\dfrac{1}{\{f(t)\}^2}r+1$，$\dfrac{dY}{dt}=f'(t)\left\{-\dfrac{1}{\{f(t)\}^2}r+1\right\}$ であるので

$$\begin{aligned}\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1&=\left(\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}}\right)^2+1\\&=\frac{f'(t)\left\{-\frac{1}{\{f(t)\}^2}r+1\right\}}{-\frac{1}{\{f(t)\}^2}r+1}+1\\&=\{f'(t)\}^2+1\\&=\{f(t)\}^2 \quad \cdots\cdots ⑥\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=T$（$T>1$）を用いると，Y は

$$Y=\frac{r}{f(t)}+f(t) \iff T^2-YT+r=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

と変形できる。また，$i(T)=T^2-YT+r$（$T>1$）とおくと，$\displaystyle\lim_{T\to 1+0} i(T)=1+r-Y<0$

（$\because$ $0<r\leqq 1$ が成り立つとき，⑤から $Y(t)$ は $T>1$，すなわち $t>0$ において単調増加より，$Y>\displaystyle\lim_{t\to+0}Y(t)=1+r$）

となるから，T は ⑦ の小さくないほうの解であるので，

$$T=\frac{Y+\sqrt{Y^2-4r}}{2}$$

よって，⑥より

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+1=T^2=\boldsymbol{\frac{Y^2-2r+Y\sqrt{Y^2-4r}}{2}}$$

(参考)　本問はカテナリー（懸垂線）が題材となっている。本問のようなカテナリーの計算では $1+\{f'(t)\}^2=\{f(t)\}^2$，$f''(t)=f(t)$ などが成立することを利用して要領よく計算を進めることが求められるので，難関大学の医学部受験生はこの計算手法を必ず押さえておきたい。

講評

[Ⅰ]［小問集合］((1) 易 (2) やや易 (3) 標準)

(1) 以外はやや重めの小問集合であり，(2) の計算，(3) の数え上げで苦戦を強いられた受験生もいたかもしれない。他の大問が比較的穏やかなので，場合によっては他の大問に時間をかけるのもありだったのではないか。

[Ⅱ]［データの分析］（標準）

誘導に従って進めれば，難しくはない。(4) は問題を解かずとも解答を埋めることが可能である。

[Ⅲ]［式と曲線］（やや難）

方針は容易に立つが，計算がやや重いので，計算の正確さが問われた出題であった。

[Ⅳ]［微分法の応用］（やや難）

カテナリー曲線が題材の問題であり，その計算手法（$f(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ とおくと $1+\{f'(t)\}^2=\{f(t)\}^2$, $f''(t)=f(t)$ 成り立つことなど）を知っているか知らないか，経験で差がつく出題であった。YMS 生は 9 月模試で出題されている。

大問 2 で毎年出題されている確率の問題がなかった。ただ全体的な穏やかな問題でどれも完答を目指せる問題であったから，あとは時間との勝負であったように思う。目標は 75%。