解答速報

東海大学医学部　数学

2020年 2月2日実施

$\boxed{1}$

(1)　a は正の定数とする．$y=-x^2+2ax+2a$ の値は 2 になることがあるが，3 になることはない．このとき，a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2)　2 つの円 $(x-\sqrt{t})^2+(y-3)^2=1$ と $x^2+(y-t)^2=9$ は $t=\boxed{\text{イ}}$ のとき外接する．

(3)　$\cos^4\dfrac{\pi}{24}-\sin^4\dfrac{\pi}{24}=\boxed{\text{ウ}}$.

(4)　次の式を因数分解しなさい．$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=\boxed{\text{エ}}$.

(5)　自然数 n^3+100 が $n+10$ で割り切れるような最大の自然数は $n=\boxed{\text{オ}}$ である．

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\int_0^x x^4e^{2t}dt-\int_0^2 16e^{2t}dt\right)=\boxed{\text{カ}}$.

解答

(1)　$y=-(x-a)^2+a^2+2a$

軸が $x=a$ （$a>0$）の 2 次関数であるから，条件は

$$2\leqq a^2+2a<3$$

$2\leqq a^2+2a$ より，$a\leqq-1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}\leqq a$　$\cdots\cdots$①

$a^2+2a<3$ より，$-3<a<1$　$\cdots\cdots$②

よって，① ② および $a>0$ の共通範囲を考えて

$$\boldsymbol{-1+\sqrt{3}\leqq a<1}.$$

(2)　2 円の中心間距離が 2 円の半径の和と等しくなるので

$$\sqrt{(\sqrt{t}-0)^2+(3-t)^2}=1+3$$

整理して，$t^2-5t-7=0$．これを解いて $t=\dfrac{5\pm\sqrt{53}}{2}$ を得るので，$t>0$ より

$$t=\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{53}}{2}}$$

(3)
$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}&=\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}\right)\\&=\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\\&=\cos\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ より，加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3\\ &= 3(b+c)a^2 + 3(b+c)^2a + 3bc(b+c)\\ &= 3(b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}\\ &= 3(b+c)(a+b)(c+a)\\ &= \boldsymbol{3(a+b)(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

(5)　n^3+100 が $n+10$ で割り算すると

$$\frac{n^3+100}{n+10} = n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n+10}$$

よって，n^3+100 が $n+10$ で割り切れるとき，$n+10$ は 900 の（正の）約数であるので，求める最大の自然数 n は $n = \mathbf{890}$**.**

(6)　$F(x) = \displaystyle\int_0^x x^4 e^{2t}dt$ とおくと，$\displaystyle\int_0^2 16e^{2t}dt = F(2)$ であるので

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2} = F'(2)$$

ここで，$F(x) = x^4\displaystyle\int_0^x e^{2t}dt$ より

$$F'(x) = 4x^3\int_0^x e^{2t}dt + x^4e^{2x}$$

よって

$$\begin{aligned}F'(2) &= 32\int_0^2 e^{2t}dt + 16e^4\\ &= 32\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^2 + 16e^4\\ &= \boldsymbol{16(2e^4-1)}.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)　方程式 $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+3=1$ の解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha>\beta)$ とおく．このとき，$\alpha=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，

$$\int_1^\alpha \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\boxed{\text{イ}}\,\alpha+\boxed{\text{ウ}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ には有理数を入れなさい．

(2)　連立不等式

$$\begin{cases}\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)\\ 1<y\end{cases}$$

の表す領域を D とする．以下の空欄には α を用いないこと．

(i)　直線 $x=a$ と D が共有点をもつような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(ii)　直線 $y=b$ と D が共有点をもつような定数 b の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(iii)　D と D の境界線を合わせた図形の面積は

$$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}+\boxed{\text{コ}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{コ}}$ には有理数，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ にはできるだけ小さい自然数を入れなさい．ただし，$\boxed{\text{キ}}<\boxed{\text{ケ}}$ とする．

(iv)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y=k$ とおくと，k の値の範囲は $\boxed{\text{サ}}$ である．

(3)　不等式 $\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)$ の表す領域を D' とおく．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D' を動くとき，$x+y=k$ とおくと，k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+3=1$ を整理すると，$x^2-x-4=0$ より，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

$\alpha>\beta$ より，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

また，$\alpha^2-\alpha-4=0$ より $\alpha^2=\alpha+4$．よって

$$\begin{aligned}\alpha^3&=\alpha\cdot\alpha^2\\&=\alpha(\alpha+4)\\&=\alpha^2+4\alpha\\&=(\alpha+4)+4\alpha\\&=5\alpha+4\end{aligned}$$

であるので,

$$\int_1^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\Big[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x\Big]_1^{\alpha}$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha^2+2\alpha-\frac{25}{12}$$
$$=-\frac{1}{6}(5\alpha+4)+\frac{1}{4}(\alpha+4)+2\alpha-\frac{25}{12}$$
$$=\boldsymbol{\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}}.$$

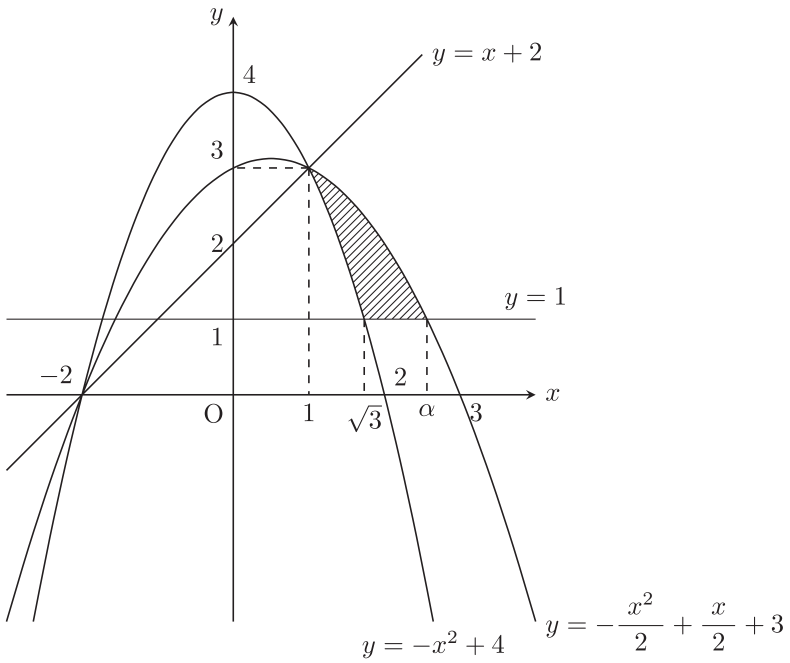
(2)　真数条件より

$$x^2+y-4>0,\ x-y+2>0$$
$$\therefore\quad y>-x^2+4,\ y<x+2\quad\cdots\cdots①$$

また，$y>1$　$\cdots\cdots$② より

$$\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)$$
$$\Longleftrightarrow x^2+y-4<x-y+1$$
$$\Longleftrightarrow y<-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+3\quad\cdots\cdots③$$

① ～ ③ を図示すると，下図の斜線部分を得る.（ただし，境界は含まれない.）



(i)　上図より，$1<a<\alpha$. よって $\boldsymbol{1<a<\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$.

(ii)　上図より，$\boldsymbol{1<b<3}$.

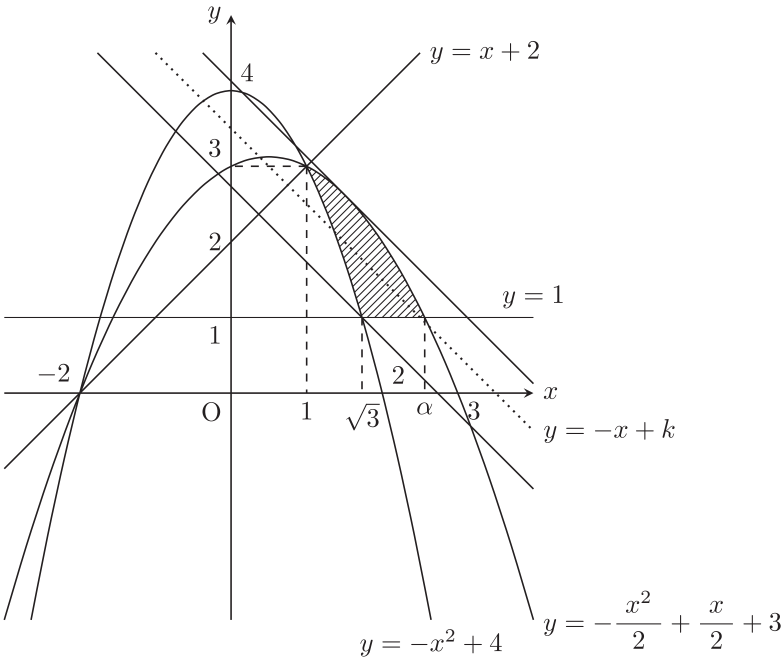
(iii)　上図より，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\alpha}\left\{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+3\right)-1\right\}dx-\int_1^{\sqrt{3}}\{(-x^2+4)-1\}dx\\
&=\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}-\Big[-\frac{x^3}{3}+3x\Big]_1^{\sqrt{3}}\\
&=\frac{17}{12}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{2}-\frac{7}{4}-2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\\
&=\boldsymbol{-2\sqrt{3}+\frac{17}{24}\sqrt{17}+\frac{13}{8}}.
\end{aligned}$$

(iv)　$x+y=k$ が $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}+3$ と接するときの k の値を求めると，$k=\dfrac{33}{8}$.

また，$x+y=k$ が $(\sqrt{3},\ 1)$ を通るときの k の値を求めると，$k=1+\sqrt{3}$.

よって，下図より $\boldsymbol{1<k<\dfrac{33}{8}}$.



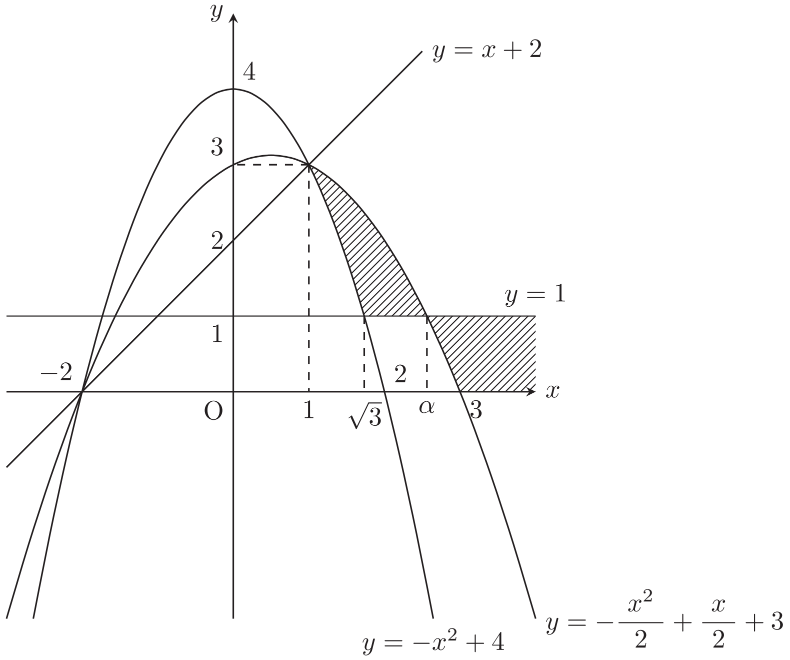
(3)　(2) の $y>1$ の場合に加え，$0<y<1$　$\cdots\cdots$④ を考える．このとき，

$$\log_y(x^2+y-4)<\log_y(x-y+2)$$

$$\Longleftrightarrow x^2+y-4>x-y+2$$

$$\Longleftrightarrow y>-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+3\quad\cdots\cdots⑤$$

したがって，① ② ③ または ① ④ ⑤ を図示すると，下図の斜線部分を得る．（ただし，境界は含まない.）



よって，(2)(iv) 同様に考えると $\boldsymbol{k>1+\sqrt{3}}$.

3

n を 3 以上の自然数とする．左から順に 1 番から n 番までの番号がついたイスが並んでいる．各イスには人が一人ずつ座っていて，最初に k 番目に座っていた人を k 番さんとよぶ．

1 番と 2 番のイスに座っている人がじゃんけんを行い。勝った方が 1 番のイスに，負けた方が n 番のイスに座り，それ以外の人は 1 つ左のイスに座る．引き分けのときは誰も移動しない．この試行を 1 回とし，試行を繰り返し行う．

(1) $n = 3$ で，2 回の試行を終えたときを考える．

(i) 左から 3 番さん，2 番さん，1 番さんの順で座っている確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(ii) 1 番さんが 2 番さんより左に座っている確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $n-1$ 回の試行を終えたとき，n 番さんが 1 番のイスに座っている確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) n 回の試行を終えたとき，n 番さんが 1 番のイスに座っている確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) n 回の試行を終えたとき，n 番さんが n 番のイスに座っている確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(5) $n-1$ 回の試行を終えたとき，全ての人が最初と同じイスに座っている確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(6) n 回の試行を終えたとき，全ての人が最初と同じイスに座っている確率は $\boxed{\text{キ}}$ である．

解答

座っている人の番号を左から順に書き並べた並びを考える．たとえば $n = 3$ のときの最初の状態を $(1,\ 2,\ 3)$ と表す．また，1 回の試行で，1 番のイスに座っている人が勝つことを○で，2 番のイスに座っている人が勝つことを●で，引き分けを△で表すこととする．

(1) $n = 3$ で 2 回の試行を終えたとき，起こりうる場合を考えると以下のようになる．

$$
(1,\ 2,\ 3) \longrightarrow \left\{
\begin{array}{l}
\bigcirc\ (1,\ 3,\ 2) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcirc\ (1,\ 2,\ 3) \\ \bullet\ (3,\ 2,\ 1) \\ \triangle\ (1,\ 3,\ 2) \end{array} \right. \\[2ex]
\bullet\ (2,\ 3,\ 1) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcirc\ (2,\ 1,\ 3) \\ \bullet\ (3,\ 1,\ 2) \\ \triangle\ (2,\ 3,\ 1) \end{array} \right. \\[2ex]
\triangle\ (1,\ 2,\ 3) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcirc\ (1,\ 3,\ 2) \\ \bullet\ (2,\ 3,\ 1) \\ \triangle\ (1,\ 2,\ 3) \end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

(i) $(3,\ 2,\ 1)$ となる確率は $\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$.

(ii) 1 番さんが 2 番さんより左に座っている確率は $\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$.

(2) $n-2$ 回目の試行を終えたとき，n 番さんは，左から 2 番目以降のイスに座る．$n-1$ 回目に 1 番のイスに戻るためには，$n-2$ 回目の試行を終えたときに n 番さんが 2 番のイスに座っている必要がある．すなわち，$n-2$ 回目までに引き分けはない．さらに $n-1$ 回目に 1 番のイスに座っている人が負けるとき，n 番さんは 1 番のイスに座る．

$$
\begin{array}{lll}
(1,\ 2,\ 3,\ ,\ \cdots,\ n) \longrightarrow \bigcirc \text{ または } \bullet & & (\diamond,\ \diamond,\ \diamond,\ \cdots,\ n-1,\ n,\ \diamond) \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \longrightarrow \bigcirc \text{ または } \bullet & & (\diamond,\ \diamond,\ \diamond,\ \cdots,\ n,\ \diamond,\ \diamond) \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \vdots & & \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \longrightarrow \bigcirc \text{ または } \bullet & & (\diamond,\ n,\ \diamond,\ \cdots,\ \diamond,\ \diamond,\ \diamond) \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \longrightarrow \bullet & & (n,\ \diamond,\ \diamond,\ \cdots,\ \diamond,\ \diamond,\ \diamond)
\end{array}
$$

したがって，求める確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2^{n-2}}{3^{n-1}}}$.

(3)　$n-1$ 回目の試行を終えたとき，n 番さんが左から 2 番目のイスに座るには，$n-1$ 回の試行のうち，1 回が引き分けで，残り $n-2$ 回が勝敗がついた場合であるから，

$$_{n-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}}.$$

この場合では，n 回目に n 番さんが勝つと 1 番のイスに座ることになるので，

$$\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n}}.$$

また，$n-1$ 回目の試行を終えたとき n 番さんが 1 番のイスに座る確率は，(2) より $\dfrac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$. このとき n 回目に n 番さんが勝つか引き分けると 1 番のイスに座ることになるので，

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^{n-1}}{3^{n}}.$$

よって

$$\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n}}+\frac{2^{n-1}}{3^{n}}=\boldsymbol{\frac{(n+1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n}}}.$$

(4)　n 回目の試行を終えたとき，n 番さんが n 番のイスに座る場合は，

(ア)　$n-1$ 回目に n 番目のイスにいたとき

(イ)　$n-1$ 回目に 1 番のイスにいたとき

(ウ)　$n-1$ 回目に 2 番のイスにいたとき

のいずれかである．

(ア)　n 回ともに引き分けになるとき，または，$n-2$ 回目までは勝敗がつき $n-1$ 回目で n 番さんが負けて n 回目で引き分けになるときなので，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{n-2}+1}{3^{n}}.$$

(イ)　n 回目の試行で n 番さんが負けるので，(2) を利用して，

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{n-2}}{3^{n}}.$$

(ウ)　$n-1$ 回目までの間に，1 回引き分けがあり，残り $n-2$ 回が勝敗がついた場合である．このとき n 回目の試行で n 番さんが負けるので，(3) を利用して

$$\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n}}.$$

(ア)〜(ウ) より，

$$\frac{2^{n-2}+1}{3^{n}}+\frac{2^{n-2}}{3^{n}}+\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{3^{n}}=\boldsymbol{\frac{(n+1)\cdot 2^{n-2}+1}{3^{n}}}.$$

(5)　$n-1$ 回の試行を終えたとき，全ての人が最初のイスに座っているのは，

(ア)　すべての人が動かないとき

(イ)　1 番の人が動かず，他の人が動くとき

のいずれかである．すなわち

(ア)　$n-1$ 回すべてが引き分けのとき

（イ） 1 番の人が勝ち続けるとき

の確率を考えればよく，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{2}{3^{n-1}}}.$$

(6) n 回の試行を終えたとき，全ての人が最初のイスに座っているのは，

（ア） すべての人が動かないとき

（イ） 1 番の人が動かず，他の人が動くとき

（ウ） すべての人が動くとき

のいずれかである．

（ア） n 回すべてが引き分けのとき

（イ） n 回のうち，1 回は引き分けで，残り $n-1$ 回は 1 番の人が勝つとき

（ウ） n 回すべてが，2 番のイスに座る人が勝つとき

の確率を考えればよく，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\boldsymbol{\frac{n+2}{3^{n}}}.$$

講評

$\boxed{1}$（易）

小問集合．どれも方針は立てやすいが，計算の手法を見誤ると計算量が増えるだろう．時間も十分にあるので，ここは完答したい．

$\boxed{2}$（標準）

前半の積分計算は易しいが計算が煩雑．(2) 以降は真数条件を利用した対数の不等式だが，領域が正確に求まれば，その先は易しい．見慣れない不等式で戸惑った生徒もいただろう．領域が描けるかどうかで大きく差がついたと思われる．

$\boxed{3}$（標準）

席替えによる場合の数の問題．(1) は素直に数え上げればよく，問題の設定をしっかり読めれば，場合分けも少なく完答が望めるだろう．しかし，ルールの把握ができなければ，ほとんど得点は取れない．大きく差がつく問題であろう．解説を見れば易しいと感じるだろうが，試験会場の緊張感の中で，すべての場合を漏れなく考えるのはなかなか難しいだろう．

全体として，方針は立ちやすい．また，計算量もそれほど多くなく，70 分という試験時間を考えれば，合格ラインは高めだろう．一次合格は 65 %は欲しい．