

杏林大学医学部 数学

2020年 2月3日実施

I, ウ, カ, ケ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

2以上の整数 p の対し, p 進数を $101_{(p)}$ のように括弧のある添え字を付けて表記する. ただし, 添え字のない数は10進数とする.

(a) 初項 $a_1 = 2$, 公比9の等比数列の第 n 項 a_n ($n = 2, 3, \dots$) は, 9進法で

$$a_n = A \underbrace{BB \cdots B}_{m \text{桁}}_{(9)} \quad (\text{ただし, } A = \boxed{\text{ア}}, B = \boxed{\text{イ}}, m = \boxed{\text{ウ}})$$

と表記され, 3進法では

$$a_n = C \underbrace{DD \cdots D}_{l \text{桁}}_{(3)} \quad (\text{ただし, } C = \boxed{\text{エ}}, D = \boxed{\text{オ}}, l = \boxed{\text{カ}})$$

と表される. また, 初項から第 n 項までの和は,

$$\sum_{k=1}^n a_k = E \underbrace{FE \cdots FE}_{(3)} \quad (\text{ただし, } E = \boxed{\text{キ}}, F = \boxed{\text{ク}})$$

と $\boxed{\text{ケ}}$ 桁の3進数で表される.

$\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- ① $n-1$ ② n ③ $n+1$ ④ $2n-2$ ⑤ $2n-1$ ⑥ $2n$ ⑦ $2n+1$ ⑧ $2n+2$

(b) 初項が $b_1 = \boxed{\text{コ}}$, 公比が $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ の等比数列 $\{b_n\}$ は, 4進法で

$$b_1 = 13_{(4)}, b_2 = 0. \boxed{\text{スセ}}_{(4)}, b_3 = 0.013_{(4)}, b_4 = 0.000 \boxed{\text{スセ}}_{(4)}, \dots$$

と表される. この数列の初項から第5項までの和を $p = \boxed{\text{ソ}}$ 進数で表すと

$$\sum_{k=1}^5 b_k = 111. \underbrace{11 \cdots 1}_{\text{小数点以下 } j \text{ 桁}}_{(p)} \quad (\text{ただし, } j = \boxed{\text{タチ}})$$

となる.

解答

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot 9^{n-1} \\ &= 2 \cdot 9^{n-1} + 0 \cdot 9^{n-2} + 0 \cdot 9^{n-3} + \dots + 0 \cdot 9^0 \\ &= \underbrace{2000 \dots 0}_{n-1 \text{桁}}_{(9)}. \end{aligned}$$

したがって、 $A = 2$, $B = 0$, $m = n - 1$ (①).

また、これを変形すると、

$$a_n = 2 \cdot 9^{n-1} = 2 \cdot 3^{2n-2} = \underbrace{2000 \dots 0}_{2n-2 \text{桁}}_{(3)}.$$

であるから、 $C = 2$, $D = 0$, $l = 2n - 2$ (④).

さらに、初項から第 n 項までの和を求めると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n 9^{k-1} \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^n (3^2)^{k-1} \\ &= 2 \cdot 3^{2n-2} + 2 \cdot 3^{2n-4} + \dots + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^0 \end{aligned}$$

これを 3 進数で表すと、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \underbrace{202020 \dots 202}_{2n-1 \text{桁}}_{(3)}$$

となるので、 $E = 2$, $F = 0$, $2n - 1$ 桁 (⑤).

(b) $b_1 = 13_{(4)} = 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 7$.

また、 $b_2 > 0$ であるから公比は正であり、 $b_3 = 0.013_{(4)}$ より、公比 $r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$.

したがって、 $r = \frac{1}{8}$.

このとき、

$$b_2 = 7 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \frac{14}{4^2} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{4^2} = 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2}$$

であるから、 $b_2 = 0.32_{(4)}$.

また、

$$S = \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 7 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} = \frac{7 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{8}} = 8 - \left(\frac{1}{8}\right)^4.$$

S を p 進数で表して整数部分が 3 桁となる時を考える. $p \geq 3$ ならば、 $S \geq p^2 \geq 3^2 = 9$ となり不適.

ゆえに $p = 2$. このとき、

$$\begin{aligned} S &= 2^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ &= 1000_{(2)} - \underbrace{0.00 \dots 01}_{12 \text{桁}}_{(2)} \\ &= 111 \cdot \underbrace{11 \dots 11}_{12 \text{桁}}_{(2)} \end{aligned}$$

と表すことができるので、 $j = 12$.

Ⅱ , の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ。

点 O を原点とする座標平面に 3 点 A(2, 0, 1), B(0, 3, 1), C(0, 0, 1) がある。

(a) $\cos \angle AOB = \frac{\text{ア}}{\text{イウ}} \sqrt{\text{エ}}$ であり, $\triangle AOB$ の面積は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ となる。また, 点 C から平面 AOB

に下した垂線の長さは $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である。

(b) 点 C と点 E(2, 3, 0) を結ぶ直線が平面 AOB と交わる点を P とすると, 線分 CE と CP の長さはそれぞれ

$$CE = \sqrt{\text{ケコ}}, \quad CP = \frac{\text{サ}}{\text{シ}} \sqrt{\text{スセ}}$$

となる。また, 点 P は $\triangle AOB$ の である。

(c) 線分 OC の中点を M とし, 点 M と点 F(2, 3, 1) を結ぶ直線が平面 AOB と交わる点 Q とすると,

$$MF = \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \sqrt{\text{ツテ}}, \quad MQ = \frac{\text{ト}}{\text{ナ}} \times MF$$

となる。また, 点 Q は $\triangle AOB$ の である。

(d) 四面体 OABE の表面および内部の領域を S, 四面体 OABF の表面および内部の領域を T とする。S ∩ T で表される 2 つの領域の共通部分の立体の表面は 面体であり, S ∪ T で表される 2 つの領域を合わせてできる立体の表面は 面体となる。

, の解答群

- ① 外心 ② 内心 ③ 重心 ④ 外心, 内心, 重心以外の点

解答

A(2, 0, 1), B(0, 3, 1), C(0, 0, 1)

(a)

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \\ &= \frac{1}{10} \sqrt{2}. \\ \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{5})^2 (\sqrt{10})^2 - 1^2} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

また, \vec{OA} と \vec{OB} に垂直なベクトルの 1 つとして $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ を定める。(これは, $\vec{OA} \cdot \vec{n} = \vec{OB} \cdot \vec{n} = 0$ を満たす)

このとき、平面 OAB 上の点 $R(x, y, z)$ に対して、 $\vec{OR} \cdot \vec{n} = 0$ が成り立つ。すなわち、

$$\vec{OR} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \iff 3x + 2y - 6z = 0.$$

これが平面 OAB の方程式である。いま、点 C と平面 OAB との距離 d は、

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{6}{7}.$$

※ 四面体 OABC の体積に注目して、 $\triangle ABC \times CO \times \frac{1}{3} = \triangle AOB \times d \times \frac{1}{3}$ から求めてもよい。

$$(b) \quad \vec{CE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{CE}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

線分 CE 上の点 P を実数 t を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \vec{CP} &= t\vec{CE} \\ \iff \vec{OP} &= (1-t)\vec{OC} + t\vec{OE} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この点 P が平面 OAB 上にあるとき、

$$3 \cdot 2t + 2 \cdot 3t - 6 \cdot (1-t) = 0 \iff t = \frac{1}{3}.$$

したがって、 $CP : CE = 1 : 3$ であり、 $CP = \frac{1}{3}\sqrt{14}$ 。

このとき点 P の座標は $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$ であり、 $\triangle OAB$ の重心に一致することがわかる。

(c) M は OC の中点なので、 $M\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ 。このとき、

$$\begin{aligned} \vec{MF} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad |\vec{MF}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{53}. \\ \vec{MQ} &= s\vec{MF} \\ \iff \vec{OQ} &= (1-s)\vec{OM} + s\vec{OF} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3s \\ \frac{1+s}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この Q が平面 OAB 上にあるとき、

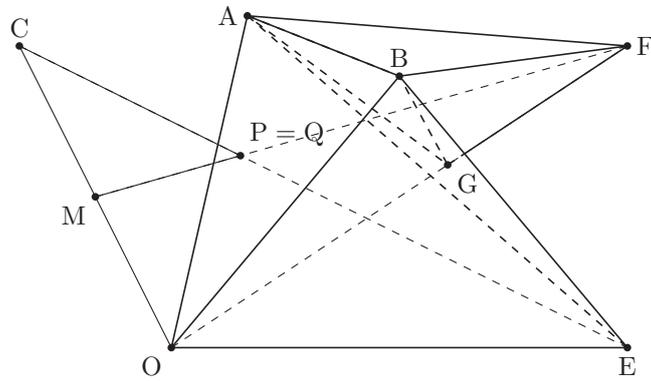
$$3 \cdot 2s + 2 \cdot 3s - 6 \cdot \frac{1+s}{2} = 0 \iff s = \frac{1}{3}$$

したがって、点 Q は $MQ : MF = 1 : 3$ であり、 $MQ = \frac{1}{3}MF$ 。

このとき点 Q の座標は $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$ であり、 $\triangle OAB$ の重心に一致することがわかる。

(d) 線分 OF と平面 ABE との交点を G とおく. $S \cap T$ で表される図形は, 4 面体 $OABG$ である.

また, $S \cup T$ で表される図形は, 四面体 $OABE$ に, 四面体 $ABFG$ を加えた形であり, その表面は 7 面体である.



III カ, ケ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

実数を定義域とする関数 $f(x) = 2x^2 - 7$, $g(x) = -2x^2 - 8x + 7$ に対して, $y = f(x)$ のグラフを曲線 C , $y = g(x)$ のグラフを曲線 D とする. $g(t) \geq f(t)$ を満たす t に対し, 点 $(t, g(t))$ における曲線 D の接線を l とする.

(a) 直線 l の式は

$$y = (\text{アイ} - \text{ウ})x + \text{エ}t^2 + \text{オ}$$

で与えられる. 直線 l と曲線 C の共有点を P, Q とし, P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする. 点 P および点 Q における曲線 C の接線の交点を R とするとき, 点 R の座標は α, β を用いて,

$$\left(\frac{\text{カ}}{\text{キ}}, \text{ク} \times \text{ケ} - \text{コ} \right)$$
 と表される.

カ, ケ の解答群

- ① α ② β ③ $\alpha + \beta$ ④ $\beta - \alpha$
- ⑤ $\alpha\beta$ ⑥ $\frac{\alpha}{\beta}$ ⑦ $\frac{\beta}{\alpha}$ ⑧ $\alpha^2 + \beta^2$
- ⑨ $\beta^2 - \alpha^2$

(b) 三角形 PQR の面積 S_1 は

$$S_1 = \text{サ} \left(\sqrt{\text{シ}t^2 + \text{ス}t + \text{セソ}} \right) \text{タ}$$

と表される.

S_1 は $t = \text{チツ}$ のとき, 最小値 テトナ をとる.

(c) 曲線 C と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とすると,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$$

が成り立つ.

解答

$$f(x) = 2x^2 - 7, g(x) = -2x^2 - 8x + 7$$

(a) $y = g(x)$ 上の点 $(t, g(t))$ における曲線 D の接線の方程式は,

$$l: y - g(t) = g'(t)(x - t) \iff y = (-4t - 8)x + 2t^2 + 7.$$

l と C との交点の座標は, 連立方程式の解であり,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7 &= (-4t - 8)x + 2t^2 + 7 \\ \iff x^2 + (2t + 4)x - t^2 - 7 &= 0 \\ \iff x &= -(t + 2) \pm \sqrt{2t^2 + 4t + 11}. \end{aligned}$$

よって、 $\alpha = -(t+2) - \sqrt{2t^2 + 4t + 11}$, $\beta = -(t+2) + \sqrt{2t^2 + 4t + 11}$ である。
 また、点 P における曲線 C の接線の方程式は、

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \iff y = 4\alpha x - 2\alpha^2 - 7.$$

同様に、点 Q における接線の方程式は $y = 4\beta x - 2\beta^2 - 7$. この 2 接線の交点を求めると、

$$(x, y) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, 2\alpha\beta - 7 \right).$$

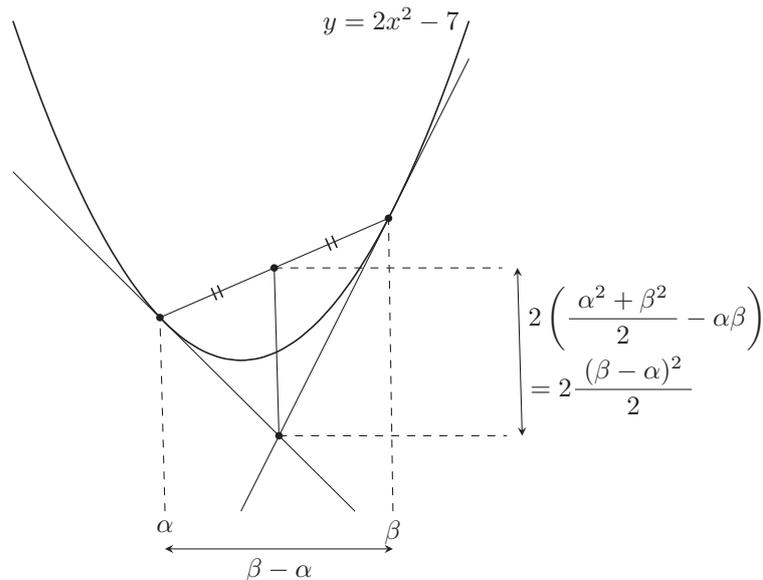
(b) $\triangle PQR$ の面積 S_1 は、 $f(x)$ の x^2 の係数が 2 であることに注意して、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \cdot \frac{1}{4} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{2t^2 + 4t + 11})^3 \\ &= 4(\sqrt{2t^2 + 4t + 11})^3 \end{aligned}$$

さらに変形すると、

$$S_1 = 4\{\sqrt{2(t+1)^2 + 9}\}^3$$

となるので、 $t = -1$ のときに最小値 $4 \cdot 3^3 = 108$ をとる.



(c) $S_2 = 2 \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3$ と求まるので、 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$.

IV ソ, タ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

座標平面上に点 $A(0, 6)$ があり, 原点 O を中心とする半径 4 の円周を C とする.

(a) 円周 C 上の動点 P は媒介変数 t を用いて $(\text{ア} \cos t, \text{イ} \sin t)$ と表される.

2 点 A, P の中点の座標は

$$(\text{ウ} \cos t, \text{エ} + \text{オ} \sin t)$$

である.

(b) 線分 AP の垂直二等分線上の点 (x, y) は, 次式を満たす.

$$\left(\frac{\text{カ}}{\text{キ}} - \sin t \right) y = x \cos t + \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$$

(c) 動点 P が円周 C 上を 1 周動くとき, 線分 AP の垂直二等分線が通過する領域は

$$\frac{\text{コサ}}{\text{シ}} x^2 + \frac{(y - \text{ス})^2}{\text{セ}} \text{ソ} = 1$$

を満たす点 (x, y) の集合であり, タ を表す. この領域の境界を表す 2 次曲線の焦点は, 原点 O と点

(チ, ツ) である.

ソ の解答群

- ① = ② > ③ < ④ ≥ ⑤ ≤

タ の解答群

- ① 放物線を境界とし, その焦点を含む領域
- ② 放物線を境界とし, その焦点を含まない領域
- ③ だ円を境界とし, その焦点を含む領域
- ④ だ円を境界とし, その焦点を含まない領域
- ⑤ 双曲線を境界とし, その焦点を含む領域
- ⑥ 双曲線を境界とし, その焦点を含まない領域

解答

(a) 半径 4 の円 C 上の動点 P は, $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t$ と表すことができる.

このとき, A, P の中点の座標は $(2 \cos t, 3 + 2 \sin t)$ である.

(b) 線分 AP の垂直二等分線上の点を $Q(x, y)$ とおくと, $AQ = PQ$ より

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} &= \sqrt{(x - 2 \cos t)^2 + (y - 2 \sin t)^2} \\ \iff \left(\frac{3}{2} - \sin t \right) y &= x \cos t + \frac{5}{2} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

(c) 垂直二等分線 ① 上の点を (X, Y) とおく. ① を満たすような実数 t が存在する条件を考えればよい.

ここで, $\sin t = p, \cos t = q$ とおくと,

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 1 \\ \left(\frac{3}{2} - p \right) Y = Xq + \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} p^2 + q^2 = 1 & \dots\dots ② \\ Yp + Xq - \frac{3}{2} Y + \frac{5}{2} = 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

この連立方程式が実数解をもつ条件は、 pq 平面上において、円 ② と直線 ③ が共有点をもつ条件に等しい。よって円の中心 $(0, 0)$ と直線 ③ との距離を d とおけば、

$$d = \frac{\left| Y \cdot 0 + X \cdot 0 - \frac{3}{2}Y + \frac{5}{2} \right|}{\sqrt{Y^2 + X^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} | -3Y + 5 | \leq \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (9Y^2 - 30Y + 25) \leq X^2 + Y^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}X^2 + \frac{(Y-3)^2}{4} \leq 1.$$

したがって、通過領域は $-\frac{1}{5}X^2 + \frac{(Y-3)^2}{4} \leq 1$ を満たす点 (x, y) の集合であり、双曲線を境界とし、その焦点を含まない領域を表す。また、焦点は、 $\sqrt{5+4}=3$ より、 $(0, 3-3)$ 、 $(0, 3+3)$ 。つまり、原点 O と点 $(0, 6)$ である。

別解

① 以下の計算；① の両辺を t 微分して

$$(-\cos t)y = (-\sin t)x \quad \dots\dots ④$$

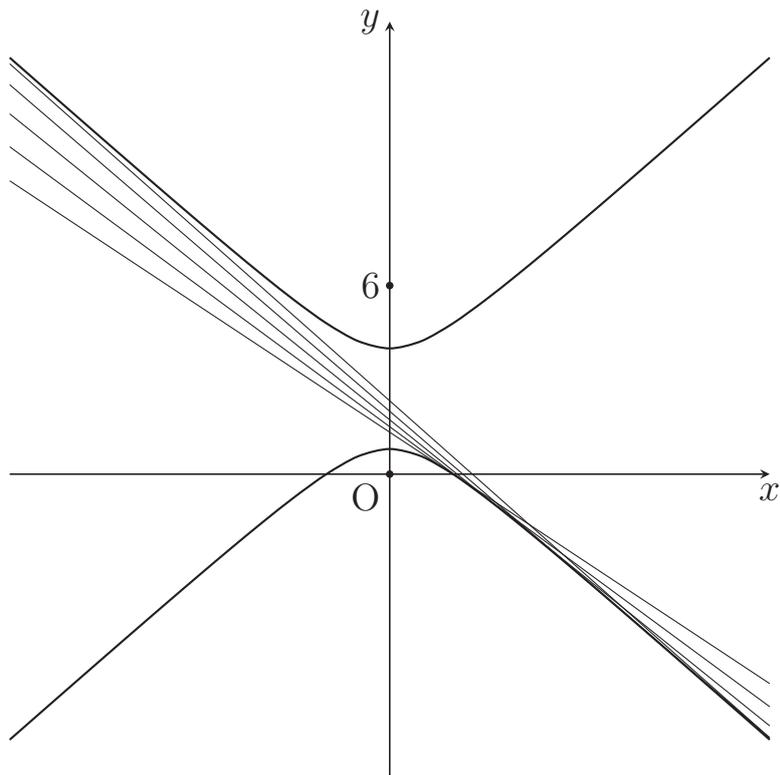
① と ④ より

$$\begin{cases} \cos t = \frac{x(3y-5)}{2(x^2+y^2)} \\ \sin t = \frac{y(3y-5)}{2(x^2+y^2)} \end{cases} \quad \dots\dots ⑤$$

⑤ を $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して整理すると

$$-\frac{1}{5}x^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \quad \dots\dots ⑥$$

を得る。すなわち、 t を $0 \leq t < 2\pi$ で動かすとき、直線 ① は双曲線 ⑥ に接しながら動くので、通過領域は $-\frac{1}{5}X^2 + \frac{(Y-3)^2}{4} \leq 1$ を満たす点 (x, y) の集合であり、双曲線を境界とし、その焦点を含まない領域を表す。また、焦点は、 $\sqrt{5+4}=3$ より、 $(0, 3-3)$ 、 $(0, 3+3)$ 、つまり、原点 O と点 $(0, 6)$ である。



講評

I (標準)

n 進数になれていれば計算で押し通せるが、マークシートであることを考えれば、 n に具体的な数字 $n = 3$ 等を代入して計算してもほとんどが求まるだろう。慌てず対処できれば取れたはずだ。

II (やや易)

空間ベクトルの典型問題、少し図形的な考察が入っているが、(c) まではコツコツ進めれば解けるだろう。大幅減点は避けたい問題だ。

III (やや易)

センター試験(もう終わってしまったが)の対策などでよく見るテーマである。真面目に積分計算をしていくと大変だが、放物線と交点を結んだ線分や、接線によって囲まれた面積は必須事項、難なく解き切りたい。

IV (標準)

垂直二等分線の通過領域の空間、医学部入試ではよく出てくるテーマなので解きなれている人も多いだろう。しかし、三角関数による実数 t の存在条件は経験がないと辛い。

全体講評

全体的に計算は煩雑になりがち。解けるから大丈夫だ、という気持ちではなく、多少わかりにくい方法であっても試験時間を短縮できるテクニックは身につけておかないと対処できないだろう。全体的にボリュームがあるので、前問解き終えようとする必要はなく、解けた分量に対する正答率が合否を分けるだろう。65%程度取れば1次合格はみえるだろう。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

YMS

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録またはLINE友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE登録

