解答速報

東北医科薬科大学　数学

2020年 1月25日実施

$\boxed{1}$

整式 $f(x)=4x^4+ax^3+bx^2+cx+d$（a，b，c，d は定数）は，整式 x^2-2x+1 で割り切れ，導関数 $f'(x)$ は整式 $x+1$ で割り切れる．このとき，次の問に答えなさい．

(1)　関数 $y=f(x)$ が $x=-1$ で極値 $y=-4$ をとるならば，整式 $f(x)$ の係数は次のようになる．

$$a=\boxed{\text{アイ}},\ b=\boxed{\text{ウエ}},\ c=\boxed{\text{オ}},\ d=\boxed{\text{カ}}$$

(2)　関数 $y=f(x)$ が 2 つの極小値を持ち，それらが等しいとき，a とその極小値は次のようになる．

$$(a,\ \text{極小値})=(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}),\ (\boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}}),\ (\boxed{\text{シスセ}},\ \boxed{\text{ソタチ}})$$

解答

$f(x)$ が $x^2-2x+1=(x-1)^2$ で割り切れるとき，2 次の整式 $g(x)$ を用いて

$$f(x)=(x-1)^2g(x)$$

と因数分解することができる．このとき，

$$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)$$

であるから，$f(1)=0$，$f'(1)=0$ を満たす．
さらに $f'(x)$ が $x+1$ で割り切れることから，因数定理により $f'(-1)=0$.
$f(x)=4x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ，$f'(x)=16x^3+3ax^2+2bx+c$ であるから，

$$\begin{cases} 4+a+b+c+d=0 \\ 16+3a+2b+c=0 \\ -16+3a-2b+c=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ b=-8,\ c=-3a,\ d=2a+4 \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　$f(-1)=-4$ であるから

$$4-a+b-c+d=-4 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(-1,\ -8,\ 3,\ 2).$$

逆にこのとき

$$f'(x)=(x-1)(x+1)(16x-3)$$

であり，増減表は次のようになる．

x		-1		$\frac{3}{16}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

確かに，$x=-1$ のとき，極小値 -4 をとる．

よって

$$(a,\ b,\ c,\ d) = \mathbf{(-1,\ -8,\ 3,\ 2)}.$$

(2) ① より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 16x^3 + 3ax^2 - 16x - 3a \\ &= 16x(x^2-1) - 3a(x^2-1) \\ &= (x-1)(x+1)(16x+3a). \end{aligned}$$

したがって，

$$-\frac{3}{16}a \fallingdotseq 1,\ \text{かつ},\ -\frac{3}{16}a \fallingdotseq -1 \cdots\cdots ③$$

のとき，極小値をもつ．

一般に，4 次関数が $x=\alpha,\ \beta$（$\alpha<\beta$）で極小値をもち，それらが等しくなるならば，

$$f(x) = p(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + q \quad (p>0)$$

と因数分解することができる．このとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2p(x-\alpha)(x-\beta)^2 + 2p(x-\alpha)^2(x-\beta) \\ &= 4p(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

となり，極小となる 2 点の座標の中点の x 座標が，極大となる座標の x 座標に一致する．

したがって

$$\frac{1+(-1)}{2} = -\frac{3}{16}a,$$

$$\text{または},\ \frac{1+\left(-\frac{3}{16}a\right)}{2} = -1,$$

$$\text{または},\ \frac{\left(-\frac{3}{16}a\right)+(-1)}{2} = 1$$

$$\therefore\ a = 0,\ 16,\ -16.$$

ここで，極小値はそれぞれ $f(1)=f(-1)$，$f(1)=f\left(-\frac{3}{16}a\right)$，$f\left(-\frac{3}{16}a\right)=f(-1)$ である．

よって，$f(1)=0$，$f(-1)=4a$ であることから，$(a,\ \text{極小値})$ の組み合わせは，

$$(a,\ \text{極小値}) = \mathbf{(0,\ 0),\ (16,\ 0),\ (-16,\ -64)}$$

$\boxed{2}$

$I = \displaystyle\int xe^{-x}\sin x dx$ を考える．このとき，次の問に答えなさい．

(1)　関数 $f(x) = x^2e^{-x}$ の $x \geqq 0$ における最大値は $\boxed{\text{ア}}e^{\boxed{\text{イウ}}}$ である．さらに $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \boxed{\text{エ}}$ である．

(2)　$I = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}xe^{-x}\cos x - \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}xe^{-x}\sin x - \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}e^{-x}\cos x + C$（$C$ は積分定数）である．

(3)　$I_n = \displaystyle\int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} xe^{-x}\sin x dx$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \dfrac{\boxed{\text{シ}} + (\boxed{\text{スセ}} + \pi)e^{-\pi}}{\boxed{\text{ソ}}(\boxed{\text{タ}} - e^{-\pi})^{\boxed{\text{チ}}}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$f'(x) = -x(x-2)e^{-x}$ であるので，$x \geqq 0$ における増減は次のようになる．

x	0		2	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$

よって，求める最大値は $\boldsymbol{4e^{-2}}$.

また，$x > 0$ のとき，$x^2e^{-x} > 0$ であるから

$$0 < x^2e^{-x} \leqq 4e^{-2}.$$

$x > 0$ より

$$0 < xe^{-x} \leqq \frac{4e^{-2}}{x}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{-2}}{x} = 0$ より，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \mathbf{0}.$$

※ 実戦上は，$e^x \gg x$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ と考える．

(2)　$I = axe^{-x}\cos x + bxe^{-x}\sin x + ce^{-x}\cos x + C$　（a，b，c は実数）とおくと，

$$\frac{d}{dx}I = (-a+b)xe^{-x} + (-a-b)xe^{-x}\sin x + (b-c)e^{-x}\sin x. \quad \cdots\cdots ①$$

また，$I = \displaystyle\int xe^{-x}\sin x dx$ より

$$\frac{d}{dx}I = xe^{-x}\sin x. \quad \cdots\cdots ②$$

したがって，① , ② より

$$-a+b=0,\ -a-b=1,\ b-c=0.$$

よって，$a = b = c = -\dfrac{1}{2}$ なので，

$$I = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{xe^{-x}\cos x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{xe^{-x}\sin x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e^{-x}\cos x + C}.$$

(3)　(2) より

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\frac{1}{2}\left[xe^{-x}\cos x + xe^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right]_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(2n-1)\pi e^{-(2n-1)\pi} + e^{-(2n-1)\pi} + 2(n-1)\pi e^{-2(n-1)\pi} + e^{-2(n-1)\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2ne^{-(2n-1)\pi} + (-\pi+1)e^{-(2n-1)\pi} + 2n\pi e^{-2(n-1)\pi} + (-2\pi+1)e^{-2(n-1)\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi e^{\pi}(1+e^{\pi})n(e^{-2\pi})^n + e^{\pi}\left\{-\pi+1+(-2\pi+1)e^{\pi}\right\}\left(e^{-2\pi}\right)^n\right] \quad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

ここで，$S_N = \sum_{n=1}^{N} nr^n$（$0<r<1$）について，

$$
\begin{aligned}
S_N &= r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (N-1)r^{N-1} + Nr^N \\
rS_N &= \quad r^2 + 2r^3 + \cdots + (N-2)r^{N-1} + (N-1)r^N + Nr^{N+1}
\end{aligned}
$$

辺々引いて

$$
\begin{aligned}
(1-r)S_N &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{N-1} + r^N - Nr^{N+1} \\
&= \frac{r(1-r^N)}{1-r} - Nr^{N+1}. \\
\therefore \quad S_N &= \frac{r(1-r^N)}{(1-r)^2} - \frac{Nr^{N+1}}{1-r}.
\end{aligned}
$$

ここで，$r=e^{-2\pi}$ とおくと，$0<e^{-2\pi}<1$ であり，(1) も併せて，$\lim_{N\to\infty} r^N = 0$，$\lim_{N\to\infty} Nr^{N+1} = 0$ となるから

$$
\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{r}{(1-r)^2}.
$$

よって，③ より

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} I_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[2\pi e^{\pi}(1+e^{\pi})nr^n + e^{\pi}\left\{-\pi+1+(-2\pi+1)e^{\pi}\right\}r^n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi e^{\pi}(1+e^{\pi})\cdot\frac{e^{-2\pi}}{(1-e^{-2\pi})^2} + e^{\pi}\left\{-\pi+1+(-2\pi+1)e^{\pi}\right\}\cdot\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi e^{\pi}(1+e^{\pi})\cdot\frac{r}{(1-r^2)^2} + e^{\pi}\left\{-\pi+1+(-2\pi+1)e^{\pi}\right\}\cdot\frac{r}{1-r}\right] \\
&= \frac{2\pi(1+e^{-\pi}) + e^{-\pi}\left\{-\pi+1+(-2\pi+1)e^{\pi}\right\}(1-e^{-2\pi})}{2(1-e^{-2\pi})^2} \\
&= \frac{(1+e^{-\pi})\left[2\pi + e^{-\pi}\left\{-\pi+1+(-2\pi+1)e^{\pi}\right\}(1-e^{-\pi})\right]}{2(1+e^{-\pi})^2(1-e^{-\pi})^2} \\
&= \frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-2\pi}+\pi e^{-\pi}+\pi e^{-2\pi})}{2(1+e^{-\pi})^2(1-e^{-\pi})^2} \\
&= \frac{(1+e^{-\pi})\left\{(1+e^{-\pi})(1-e^{-\pi}) + \pi e^{-\pi}(1+e^{-\pi})\right\}}{2(1+e^{-\pi})^2(1-e^{-\pi})^2} \\
&= \frac{(1+e^{-\pi})^2(1-e^{-\pi}+\pi e^{-\pi})}{2(1+e^{-\pi})^2(1-e^{-\pi})^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1+(-1+\pi)e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})^2}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

赤，青，黄の 3 色のペンキがあり，これらを用いて以下のマス目板を上下左右が同色にならないようにしつつ塗りつぶしたい．(ただし，ナナメのマスは同色であってよいとする.）このとき，次の問に答えなさい．

(1) 下の形の 9 マス目板を，赤，青，黄のうち 2 色のみを用いて塗りつぶす方法は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りである．

(2) 上と同じ 9 マス板に対し，3 色全ての色を用いて塗りつぶす方法は全部で $\boxed{\text{イウ}}$ 通りである．ただし，板を回転して同じになる塗り方は同じとみなすものとする．また板を裏返しにすることは認めない．

(3) 下の 12 マス目板が今度は壁に固定されており回転や裏返しはできないとする．このとき，赤，青，黄色のマスがそれぞれ 4 マスずつであり，かつ，上段の 4 マスのうち 2 マスが赤色であるように塗りつぶす方法は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りである．

上段 →				
中段 →				
下段 →				

解答

(1) 2 色のみ使うとき，2 色の選び方は，${}_3C_2 = 3$ 通り．

2 色のみを用いて塗りつぶすとき，たとえば左上のマスに塗る色を決めると，塗り方は 1 通りに定まるので，左上のマスに塗る色を考えて，2 通り．

よって，求める場合の数は $3 \times 2 = \mathbf{6}$ 通り．

(2) まず，真ん中のマスに赤（R）を塗るとき，その塗り方は下図の 6 通り．

(i)

	R	

(ii)

	R	
R		

(iii)

	R	
R		R

(iv)

		R
	R	
R		

(v)

R		
	R	
R		R

(vi)

R		R
	R	
R		R

続いて，各場合について，青（B），黄（Y）の塗り方を考える．

- (i) のとき
  左上のマスに塗る色を考えると，塗り方は 1 通りに定まるため，左上のマスに塗る色を考えて，2 通り．

○	●	○
●	R	●
○	●	○

- (ii) のとき
  左上のマスに塗る色を決めると，塗り方は 1 通りに定まるので，左上に塗る色を考えて，2 通り．

○	●	○
●	R	●
R	●	○

- (iii) のとき
  左上のマスに塗る色を決めると，上 2 段の 5 箇所の塗り方は 1 通りに定まるから，塗る色を考えて，2 通り．

また，三段目の「◎」のマスは，他のマスに塗り方を影響を受けずに塗る色を選ぶことができるので，2 通り．
したがって，$2 \times 2 = 4$ 通り．

○	●	○
●	R	●
R	◎	R

- (iv) のとき
  左上のマスに塗る色を決めると，「○」「●」の 3 箇所の塗り方は 1 通りに定まり，右下のマスに塗る色を決めると，「△」「▲」の 3 箇所の塗り方は 1 通りに定まる．それぞれの色の塗り方を考える．
  (○，●，△，▲) は (青，黄，青，黄)，(青，黄，黄，青)，(黄，青，青，黄)，(黄，青，黄，青) の 4 通りがあるが，このうち，(青，黄，青，黄) と (黄，青，黄，青) の場合は回転すると一致するので 1 通りとする．
  したがって，3 通り．

○	●	R
●	R	▲
R	▲	△

- (v) のとき
  右上のマスに塗る色を決めると，「○」「●」の 3 箇所の塗り方は 1 通りに定まるから，塗る色を考えて，2 通り．
  また，「□」「◇」のマスに塗る色は，先の 3 箇所の塗り方に影響を受けず塗る色を選ぶことができるので，それぞれ 2 通り．
  したがって，$2 \times 2 \times 2 = 8$ 通り．

R	●	○
◇	R	●
R	□	R

- (vi) のとき
  下図より，塗り方は 4 通り．

R	B	R
B	R	Y
R	Y	R

R	B	R
Y	R	Y
R	B	R

R	B	R
Y	R	Y
R	Y	R

R	Y	R
B	R	B
R	B	R

よって，真ん中のマスに赤を塗るとき，(i)〜(vi) より

$$2 + 2 + 4 + 3 + 8 + 4 = 23(\text{通り})$$

となるので，真ん中に青，黄を塗る場合も考えて，$23 \times 3 = \mathbf{69}$ 通り．

(3)　まず，上段の 2 のマスに赤（R）を塗るとき，その塗り方は下図の 6 通り．

(I)

R		R	

(II)

R			R

(III)

	R		R

続いて，各場合について，赤（R）2 マス，青（B）4 マス，黄（Y）4 マスの塗り方を考える．

- (I) のとき
  残りの赤（R）2 マスの塗り方は次のようになる．

R		R	
	R		R

R		R	
	R		
R			

R		R	
	R		
		R	

R		R	
	R		
			R

R		R	
			R
R			

R		R	
			R
	R		

R		R	
			R
		R	

R		R	
R		R	

R		R	
R			R

R		R	
	R		R

それぞれの場合について，空白が隣接する部分について，上下左右が同色にならないように塗りつぶしていくと，次のようになる．（ただし，それぞれの場合について，もっとも多く塗りつぶせるように考えた．）

R		R	
○	R	○	R
●	○	●	○

R		R	○
	R	○	●
R	○	●	○

R		R	○
	R	○	●
		R	○

R		R	○
○	R	○	●
●	○	●	R

R	○	R	
○	●	○	R
R	○	●	○

R	○	R	
○	●	○	R
●	R	●	○

R	○	R	
○	●	○	R
●	○	R	

R	○	R	○
○		○	●
R	○	R	○

R	○	R	○
○	●	○	●
R	○	●	R

R	○	R	○
○	●	○	●
●	R	●	R

ここで，残りを塗りつぶしていくときに，それぞれの色が 4 マスの塗り方が可能となるのは，次の 7 通り．

R	●	R	●
○	R	○	R
●	○	●	○

R	●	R	○
●	R	○	●
R	○	●	○

R	●	R	○
●	R	○	●
○	●	R	○

R	●	R	○
○	R	○	●
●	○	●	R

R	○	R	●
○	●	○	R
●	R	●	○

R	○	R	●
○	●	○	R
●	○	R	●

R	○	R	○
○	●	○	●
●	R	●	R

したがって，それぞれの場合について，「○」「●」の塗り方を考えて，$7 \times 2 = 14$ 通り．

- (II) のとき
  残りの赤（R）2 マスの塗り方は次のようになる．

R			R
	R		
R			

R			R
	R		
		R	

R			R
	R		
			R

R			R
		R	
R			

R			R
		R	
	R		

R			R
		R	
			R

R			R
R		R	

R			R
R			R

R			R
	R		R

(I) のときと同様に塗りつぶしていくと以下のようになる．

R	○	●	R
	R	○	●
R	○	●	○

R	○	●	R
	R	○	●
		R	○

R	○	●	R
○	R	○	●
●	○	●	R

R	○	●	R
○	●	R	●
R	○	●	○

R	○	●	R
○	●	R	
●	R		

R	○	●	R
○	●	R	
●	○	●	R

R	○	●	R
○	●	○	●
R	○	R	○

R	○	●	R
○	●	○	●
R	○	●	R

R	○	●	R
○	●	○	●
●	R	●	R

ここで，残りを塗りつぶしていくときに，それぞれの色が 4 マスの塗り方が可能となるのは，次の 7 通り．

R	○	●	R
●	R	○	●
R	○	●	○

R	○	●	R
●	R	○	●
○	●	R	○

R	○	●	R
○	R	○	●
●	○	●	R

R	○	●	R
○	●	R	●
R	○	●	○

R	○	●	R
○	●	R	○
●	R	○	●

R	○	●	R
○	●	R	○
●	○	●	R

R	○	●	R
○	●	○	●
R	○	●	R

したがって，それぞれの場合について，「○」「●」の塗り方を考えて，$7 \times 2 = 14$ 通り．

- (Ⅲ) のとき

  対称性より，(I) と同様に，14 通り．

よって，(I)〜(Ⅲ) より $14 + 14 + 14 = \mathbf{42}$ 通り．

別解

(2) の数え方について，中心から順番に色を設定していくと，以下のように場合分けして塗ることができる．
中心の色を「◎」とおくとき，これに隣接するマスは同色ではないので，「◇」「☆」のどちらか．これらを配色すると，以下の 4 つの場合のみである．

(i)

	◇	
◇	◎	◇
	◇	

(ii)

	◇	
◇	◎	◇
	☆	

(iii)

	◇	
◇	◎	☆
	☆	

(iv)

	◇	
☆	◎	☆
	◇	

- (i) のとき

回転して一致するものを除くので，残り 4 マスの塗り方は以下の 5 通りである．

☆	◇	☆
◇	◎	◇
☆	◇	☆

☆	◇	☆
◇	◎	◇
☆	◇	◎

☆	◇	☆
◇	◎	◇
◎	◇	◎

☆	◇	◎
◇	◎	◇
◎	◇	☆

◎	◇	◎
◇	◎	◇
◎	◇	◎

この 5 通りに対して，(◎，◇，☆) の色の選び方を考えると，$5 \times 3! = 30$ 通り．

- (ii) のとき
  回転して一致する組は存在しないので，残りのマスの色を選ぶ．上の 2 マスは「◎」「☆」のどちらかを塗る．また，下の 2 マスは「◎」を塗る．したがって，その塗り方は $2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ 通り．

?	◇	?
◇	◎	◇
◎	☆	◎

  この 4 通りに対して，(◎，◇，☆) の色の選び方を考えると，$4 \times 3! = 24$ 通り．

- (iii) のとき
  回転して一致する組は存在しないので，残りのマスの色を選ぶ．左上のマスは「◎」「☆」のいずれか，右下のマスは「◎」「◇」のいずれかを塗る．残りの 2 マスは「◎」を塗るので，その塗り方は $2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ 通り．

?	◇	◎
◇	◎	☆
◎	☆	?

  「◇」の「☆」の位置を入れ替えると，回転して同じ場合が出てくるので，この 4 通りに対して，◎の色を決めるとその塗り方が定まる．したがって $4 \times 3 = 12$ 通り．

- (iv) のとき
  残りのマスには「◎」を塗るので，その塗り方は 1 通り．

◎	◇	◎
☆	◎	☆
◎	◇	◎

  「◇」の「☆」の位置を入れ替えると，回転して同じ場合が出てくるので，この 1 通りに対して，◎の色を決めるとその塗り方が定まる．したがって，$1 \times 3 = 3$ 通り．

(i)〜(iv) より，$30 + 24 + 12 + 3 = \mathbf{69}$ 通り．

講評

昨年よりかなり難化した．特に大問 2 の (3) と大問 3 の (2)(3) は時間内に解き切ることは難しい問題である．大問 1 を完答し，大問 2，大問 3 の前半で点数を取ることができれば一次突破は十分できると言って良いだろう．1 限目の数学ができなかったからといって，あきらめないことが一番重要だったのではないか．