1 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

平行四辺形 OACB を考える．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ のなす角は 60° とする．

(1) $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) s が実数全体を動くとき，$|\vec{a}+s\vec{b}|$ が最小となるときの s の値を求めよ．また，そのとき $(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の値を求めよ．

(3) すべての実数 t に対し $|t\vec{a}+k\vec{b}|\geqq|\vec{a}|$ が成り立つような実数 k の範囲を求めよ．

(4) 平行四辺形 OACB の面積を求めよ．

(1) 平行四辺形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$ と表せる．条件より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1 \quad \cdots①$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4 \quad \cdots②$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$$

を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ のなす角を考えると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\cos60^\circ,\quad |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1 \quad \cdots③$$

①，②，③ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{4},\quad |\vec{a}|=\frac{\sqrt{7}}{2},\quad |\vec{b}|=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots答$$

(2) $|\vec{a}+s\vec{b}|$ が最小となるとき，$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{b}$ とおくと，

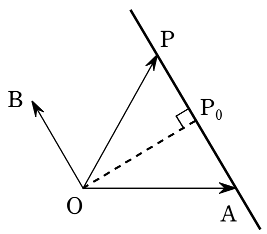
点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は右図のような直線上を動く．

$|\vec{p}|$ が最小となるのは，$\vec{p}\perp\vec{b}$ のとき $(\mathrm{P_0})$ であり，

$$\vec{p}\cdot\vec{b}=(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2=0$$

よって，$s=1$ である．…答



このとき，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=1 \quad \cdots答$$

【別解】

$$|\vec{a}+s\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2s\,\vec{a}\cdot\vec{b}+s^2|\vec{b}|^2=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}s+\frac{3}{4}s^2=\frac{3}{4}(s-1)^2+1$$

と考えると，$s=1$ のとき最小値 1 である．

(3) すべての実数 t に対して $|t\vec{a}+k\vec{b}|\geqq|\vec{a}|$ が成り立つときを考える．両辺ともに正であり 2 乗しても同値なので，

$$|t\vec{a}+k\vec{b}|^2\geqq|\vec{a}|^2$$

$$t^2|\vec{a}|^2+2kt\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2\geqq|\vec{a}|^2$$

$$\frac{7}{4}t^2-\frac{3}{2}kt+\frac{3}{4}k^2-\frac{7}{4}\geqq0$$

$$7\left(t-\frac{3}{7}k\right)^2+\frac{12k^2-49}{7}\geqq0$$

すべての実数 t に対して成り立つためには，

$$\frac{12k^2-49}{7}\geqq0 \iff k\leqq-\frac{7\sqrt{3}}{6},\ \frac{7\sqrt{3}}{6}\leqq k \quad \cdots答$$

【補足】

2 次不等式 $7t^2-6kt+3k^2-7\geqq0$ が常に成り立つ条件なので，t についての 2 次方程式 $7t^2-6kt+3k^2-7=0$ が異なる 2 つの実数解をもたない条件を考えてもよい．

(4) 平行四辺形 OACB の面積 S は

$$S=2\times\triangle\mathrm{OAB}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots答$$

2 次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) α および β が複素数であるとき，

$$\overline{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}$$

を，α，β，$\overline{\alpha}$ ならびに $\overline{\beta}$ を用いてできるだけ簡単に表せ．

(2) $$\alpha=\frac{2}{1-i},\quad \beta=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

を計算過程に用いて，$\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5}{12}\pi$ および $\cos\frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ．ただし i は虚数単位とする．

(3) α，β が (2) のように与えられるとき，

$$\left\{\overline{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}\right\}^9$$

の値を求めよ．ただし，必要ならば，i を虚数単位として用いよ．

(1) $$\overline{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha\overline{\beta}}}{\overline{\overline{\alpha}\beta}}=\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}} \quad \cdots答$$

(2) $$\alpha=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{1-i^2}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\beta=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{3-i^2}=3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\frac{1+i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{(1+i)(3-\sqrt{3}i)}{9-3i^2}=\frac{3+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i}{12}$$

$$\therefore\ \cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}\cdot\frac{3+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3}i)}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

実部と虚部を比較して

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \cdots答$$

また

$$\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$=(1+i)(3+\sqrt{3}i)=3-\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i$$

$$\therefore\ \cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi=\frac{3-\sqrt{3}+(3+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

実部と虚部を比較して

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \cos\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \cdots答$$

(3) $$\overline{\alpha}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$\overline{\beta}=2\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

であるから，(1) の結果を用いると

$$\overline{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}=\frac{\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}}{\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}$$

$$=\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

よって

$$\left\{\overline{\left(\frac{\alpha\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\beta}\right)}\right\}^9=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\cdot9\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\cdot9\right)=\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$=i \quad \cdots答$$

3 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $\begin{cases} 2^{x-1}+3^{y-1}=19 \\ 2^{x+2}-3^{y+2}=47 \end{cases}$

を解け

(2) $(a+2b)(2b+3c)(3c+a)+6abc$ を因数分解せよ．

(3) 5 人がじゃんけんをするとき，一度のじゃんけんで勝ちが 1 人決まる確率を求めよ．ただし，各人がじゃんけんでグー，チョキ，パーを出す確率はすべて $\frac{1}{3}$ であるとする．

(4) a を実数とする．3 辺の長さがそれぞれ $a-1$，a，$a+2$ となる三角形が鈍角三角形になる a の範囲を求めよ．

(5) 半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積の $\frac{1}{n}$ を S_n とする．このとき，S_{2018} を S_{1009} を用いて表せ．

(1) $X=2^{x-1}$，$Y=3^{y-1}$ とおくと，与えられた方程式は，

$$\begin{cases} X+Y=19 \\ 8X-27Y=47 \end{cases} \iff \begin{cases} X=16 \\ Y=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{x-1}=2^4 \\ 3^{y-1}=3 \end{cases}$$

したがって，$(x,\ y)=(5,\ 2)$ …答

(2) $A=a$，$B=2b$，$C=3c$，$x=A+B+C$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(A+B)(B+C)(C+A)+ABC \\ &=(x-C)(x-A)(x-B)+ABC \\ &=x^3-(A+B+C)x^2+(AB+BC+CA)x \\ &=x^3-x\cdot x^2+(A+B+C)(AB+BC+CA) \\ &=(a+2b+3c)(2ab+6bc+3ca)\end{aligned}$$ …答

(3) 5 人でじゃんけんをするときの手の出し方は 3^5 通り．

このうち，勝つ人の決め方が 5 通り，勝つ人の手の出し方が 3 通りあるから，

$$\frac{5\cdot 3}{3^5}=\frac{5}{81}$$ …答

(4) $a-1$，a，$a+2$ の中で最長の辺の長さは $a+2$ である．

三角形の成立条件は，

$$(a-1)+a>a+2 \iff a>3 \quad \cdots①$$

また，長さ $a+2$ の辺の向かいの角が鈍角となればよいから

$$(a-1)^2+a^2<(a+2)^2 \iff a^2-6a-3<0$$
$$\iff 3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3} \quad \cdots②$$

①，② より，

$$3<a<3+2\sqrt{3}$$ …答

(5) $\theta=\frac{2\pi}{1009}$ とおく．

このとき，2 辺の長さが 1，その間の角が θ の二等辺三角形の面積が S_{1009}，

2 辺の長さが 1，その間の角が $\frac{\theta}{2}$ の二等辺三角形の面積が S_{2018} である．

したがって，

$$S_{1009}=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad S_{2018}=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

半角の公式を用いて，

$$S_{2018}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-4S_{1009}{}^2}}$$ …答

4 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2dx$

の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2) x の方程式 $e^{3x}=kx(3x+2)$ が実数解を 1 つもつように実数 k の取りうる値の範囲を定めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(3) 関数

$$f(x)=\int_x^{x+1}|t(t^2-1)|dt$$

の最小値を求めよ．

(1) $$\begin{aligned}\int_1^e x(\log x)^2dx&=\frac{1}{2}\int_1^e (x^2)'(\log x)^2dx \\ &=\frac{1}{2}\Big[x^2(\log x)^2\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e x\log x\,dx \\ &=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\int_1^e (x^2)'\log x\,dx \\ &=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\Big[x^2\log x\Big]_1^e+\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx \\ &=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\ &=\frac{1}{4}\Big[x^2\Big]_1^e=\frac{e^2-1}{4}\end{aligned}$$ …答

(2) $e^{3x}=kx(3x+2)$ …① において $k=0$ と仮定すると，$e^{3x}=0$ より矛盾．

したがって，$k\neq 0$ としてよく，

$$① \iff (3x^2+2x)e^{-3x}=\frac{1}{k}$$

$f(x)=(3x^2+2x)e^{-3x}$ とおくと，

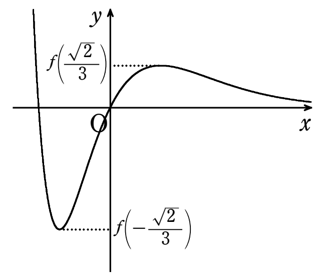
$$\begin{aligned}f'(x)&=(6x+2)e^{-3x}-3(3x^2+2x)e^{-3x} \\ &=(-9x^2+2)e^{-3x} \\ &=-9\left(x+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)e^{-3x}\end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(∞)	↘	極小	↗	極大	↘	(0)

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)e^{-3x}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{e^{3x}}=0$

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．



このグラフと直線 $y=\frac{1}{k}$ の共有点がただ 1 つとなればよいから，

$$\frac{1}{k}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\ \frac{1}{k}>f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$\iff \frac{1}{k}=\frac{2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}}{3},\ \frac{1}{k}>\frac{2(1+\sqrt{2})}{3e^{\sqrt{2}}}$$
$$\iff k=-\frac{3(1+\sqrt{2})}{2e^{\sqrt{2}}},\ 0<k<\frac{3(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}}{2}$$ …答

(3) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|(t-1)t(t+1)|dt$ より，

$$\begin{aligned}f'(x)&=|x(x+1)(x+2)|-|(x-1)x(x+1)| \\ &=|x(x+1)|(|x+2|-|x-1|)\end{aligned}$$

$$|x+2|-|x-1|=\begin{cases}-3 & (x\leqq -2) \\ 2x+1 & (-2\leqq x\leqq 1) \\ 3 & (1\leqq x)\end{cases}$$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	最小	↗

したがって，$f(x)$ の最小値は，$g(t)=|t(t^2-1)|$ が偶関数であることを利用して

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|t(t^2-1)|dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t^2-1)|dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}(t-t^3)dt$$

$$=\left[t^2-\frac{1}{2}t^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{32}=\frac{7}{32}$$ …答

【講評】

1 平面ベクトル

(1)でしっかり立式をして，正解ができるかがポイントとなる．(2)(3)(4)は典型問題なので，確実に取りたい．

2 複素数平面

結果のみ答えればよいので，(2)は cos15°，sin15° の値を知っていれば，即答できる．加法定理で解いても良いだろう．全問確実に取りたい．

3 小問集合

(1)～(4)はどれも参考書に載っている典型問題だが，やったことがあるかないかで明暗が別れたと思われる．(5)だけ異質であり，式変形が煩雑になって戸惑っただろう．

4 微分積分

典型問題だが，計算量が多く，今回の試験の中で最も苦労したと考えられる．(3)は x の値で場合分けをし，絶対値を外して計算することもできるが，本解のように，$|t(t^2-1)|$ が連続関数であることから，$f'(x)$ を直接求める方法が最短の求め方となる．

Ⅰ期と同様で，全問数値のみを答える形式となった．全体として，典型的な問題ばかりだが，計算量が多く，正解をしっかり出すことは難しいと考えられる．4の正答率が低いであろうことを考えると，3でどれだけ落とさないかが重要となる．ただし，去年のⅡ期と比較すると，取り掛かり易い問題が多く，一次合格ラインは75%程度と予想される．