[I]

a，b，c はいずれも 1 以上 9 以下の自然数とする．自然数 N を 11 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(11)}$ となり，13 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(13)}$ となるという．a，b，c の値を求めよ．また N を 10 進法で表せ．解答欄には答えのみを記入せよ．

$$N = abc_{(11)} = a \cdot 11^2 + b \cdot 11 + c$$
$$N = cab_{(13)} = c \cdot 13^2 + a \cdot 13 + b$$

したがって，

$$121a + 11b + c = 169c + 13a + b$$
$$108a + 10b - 168c = 0$$
$$54a + 5b - 84c = 0$$
$$5b = 84c - 54a = 6(14c - 9a)$$

5 と 6 は互いに素であるから b は 6 の倍数である．条件より，b は 1 以上 9 以下の自然数であるから

$b = 6$ …㊟

このとき，

$14c - 9a = 5$ …①

ここで，$(a,\ c) = (1,\ 1)$ はこの方程式を満たすので，

$14 \cdot 1 - 9 \cdot 1 = 5$ …②

①−② より

$$14(c-1) - 9(a-1) = 0$$

9 と 14 は互いに素であるから，この方程式を変形して，整数 k を用いると

$$\frac{c-1}{9} = \frac{a-1}{14} = k$$
$$(a,\ c) = (14k+1,\ 9k+1)$$

a，c はともに 1 以上 9 以下の自然数であるから，$k = 0$ のとき $(a,\ c) = (1,\ 1)$ となる．

$(a,\ b,\ c,\ N) = (1,\ 6,\ 1,\ 188)$ …㊟

[II]

O を原点とする座標空間において 2 点 $\mathrm{A}(3\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}+2,\ 0)$，$\mathrm{B}(6,\ -6\sqrt{3}-1,\ 6\sqrt{2})$ と平面 $\alpha : \sqrt{3}x - y - \sqrt{2}z = 1$ がある．また直線 AB と α との交点を P，α に関して B と対称な点を Q とするとき，以下の各問いの答えのみを解答用紙に記入せよ．

問 1　P の座標を求めよ．

問 2　B から平面 α に垂線 BH を下すとき，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を求めよ．

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ．

問 4　$\cos\angle\mathrm{BPQ}$ の値を求めよ．

問 1　直線 AB 上の点 P を実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}-3 \\ 3\sqrt{3}+2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -6\sqrt{3}-1 \\ 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (3\sqrt{3}-3) + (9-3\sqrt{3})t \\ (3\sqrt{3}+2) - (9\sqrt{3}+3)t \\ 6\sqrt{2}\,t \end{pmatrix}$$

また，平面 α 上にある点 $(0,\ -1,\ 0)$ を C とおく．平面 α に垂直なベクトルの一つを $\vec{n}$ とするとき，α の方程式から

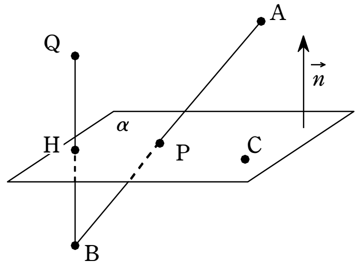
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と置けばよい．ここで，点 P は平面 α 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \vec{n}$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \vec{n} = 18(\sqrt{3}-1)t - 6(\sqrt{3}-1) = 0$$

よって，$t = \dfrac{1}{3}$ であり，点 P の座標は $(2\sqrt{3},\ 1,\ 2\sqrt{2})$ …㊟

問 2　点 H は平面 α 上にあることから，



$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \vec{n}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = k\vec{n}$ とおけば，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{\mathrm{BH}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \cdot \vec{n} = 0$$
$$(k\vec{n} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \cdot \vec{n} = 0$$
$$k|\vec{n}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \vec{n} = 0$$
$$k = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6\sqrt{3} \\ -6\sqrt{2} \end{pmatrix}$ でを用いて，$|\vec{n}|^2 = 6$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \vec{n} = 12(1-\sqrt{3})$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = 2(1-\sqrt{3})\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-6 \\ -2+2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \cdots㊟$$

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3}-6 \\ -5-2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}+4\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -6-2\sqrt{3} \\ 4\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \cdots㊟$$

問 4　$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角を $\alpha\,(0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ)$ とおくとき，

$$|\vec{n}| = \sqrt{6},\ |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 8\sqrt{3},\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{n} = 12(1-\sqrt{3})$$

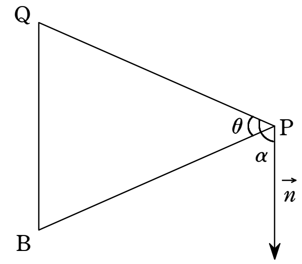
であり，

$$\cos\alpha = \frac{12(1-\sqrt{3})}{\sqrt{6} \cdot 8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

となる．このとき，$\alpha = 105^\circ$ であり，

したがって，求める θ は，

$$\theta = 180^\circ - 75^\circ \times 2 = 30^\circ$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots㊟$$



【参考】

△PBQ に注目してもよい．$\mathrm{PQ} = \mathrm{PB} = 8\sqrt{3}$，$\mathrm{BQ} = 4\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$ となるので，余弦定理から $\cos\theta$ が求まる．

【補足】

本問に出てくる値 [$\sqrt{3}-1$] に注目したい．

$$\sqrt{3} - 1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}\cos 75^\circ$$

となるので，これらを用いると次のようなことがわかる．

$$\begin{cases} \mathrm{A}(3\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}-2,\ 0) \\ \mathrm{B}(6,\ -6\sqrt{3}-1,\ 6\sqrt{2}) \\ \alpha : \sqrt{3}x - y - \sqrt{2}z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\ y \text{ 軸方向 } +1 \text{ 平行移動}\ )} \begin{cases} \mathrm{A}'(3\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}-3,\ 0) \\ \mathrm{B}'(6,\ -6\sqrt{3},\ 6\sqrt{2}) \\ \alpha' : \sqrt{3}x - y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{A}'(6\sqrt{2}\cos 75^\circ,\ 6\sqrt{2}\sin 75^\circ,\ 0) \\ \mathrm{B}'(12\cos(-60^\circ),\ 12\sin(-60^\circ),\ 6\sqrt{2}) \\ \alpha' : \sqrt{3}x - y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\ z \text{ 軸を中心に } 15^\circ \text{ 回転}\ )} \begin{cases} \mathrm{A}''(6\sqrt{2}\cos 90^\circ,\ 6\sqrt{2}\sin 90^\circ,\ 0) \\ \mathrm{B}''(12\cos(-45^\circ),\ 12\sin(-45^\circ),\ 6\sqrt{2}) \\ \alpha'' : \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{A}''(0,\ 6\sqrt{2},\ 0) \\ \mathrm{B}''(6\sqrt{2},\ -6\sqrt{2},\ 6\sqrt{2}) \\ \alpha'' : x - y - z = 0 \end{cases}$$

これらを用いると $\cos\angle\mathrm{BPQ}$ は容易だ．

$\cos 75^\circ$ は Ⅳ にも出題されている．

[III]

複素数 z に対して

$$\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}$$

が実数となるとき，z の動く複素数平面上の図形を図示し，絶対値 $|z|$ の最大値，最小値を求めよ．

$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，

$$\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}=\frac{(1+i)\{x+(y+3)i\}}{(x+4)+(y-1)i}$$

$$=\frac{(x-y-3)+(x+y+3)i}{(x+4)^2+(y-1)^2}\cdot\{(x+4)-(y-1)i\}$$

その虚部のみを取り出すと，

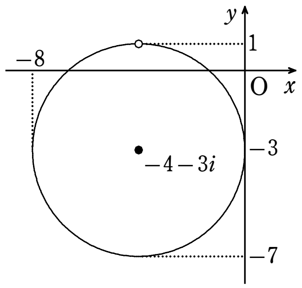
$$\frac{(x+y+3)(x+4)-(x-y-3)(y-1)}{(x+4)^2+(y-1)^2}$$

であり，この値が 0 となればよいから，

$$\begin{cases}(x+y+3)(x+4)-(x-y-3)(y-1)=0\\(x,\ y)\fallingdotseq(-4,\ 1)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x+4)^2+(y+3)^2=16\\(x,\ y)\fallingdotseq(-4,\ 1)\end{cases}$$

したがって，z の動く図形は，中心 $-4-3i$，半径 4 の円（ただし，点 $-4+i$ を除く）となり，これを図示すると，右図のようになる．　…答



このとき，$|z|$ が最大，最小となる z はともに，

$$\arg z=\arg(-4-3i)$$

を満たす．

$|-4-3i|=5$ で，円の半径は 4 であるから，

$|z|$ の最大値は $5+4=9$，最小値は $5-4=1$　…答

[IV]

O を原点とする xy 平面上において，次の 2 曲線を考える．

$$C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\quad(x\geqq0,\ y\geqq0),\ C_2:y=-x^3+\frac{7}{2}x$$

以下の各問いに答えよ．なお答えの数値は有理化すること．

問 1　C_1 と C_2 の交点の x 座標を全て求めよ．

問 2　C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

問 1　$C_1:3x^2+(2y)^2=12$，$C_2:2y=-2x^3+7x$ から，y を消去して，

$$3x^2+(-2x^3+7x)^2=12$$

$$\Longleftrightarrow x^6-7x^4+13x^2-3=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-3)(x^4-4x^2+1)=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2=3,\ 2\pm\sqrt{3}$$

これらの値について，C_2 の方程式から $\frac{y}{x}=-x^2+\frac{7}{2}$ であり，C_1 の条件 $y\geqq0$ から，

$$-x^2+\frac{7}{2}\geqq0\Longleftrightarrow x^2\leqq\frac{7}{2}$$

したがって，

$$x^2=3,\ 2-\sqrt{3}$$

さらに $x\geqq0$ より，

$$x=\sqrt{3},\ \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ の二重根号を外すと，

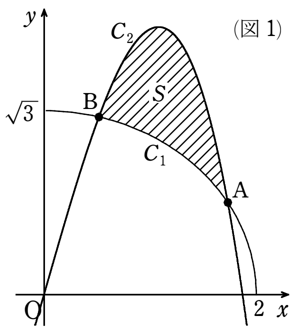
$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

したがって，C_1 と C_2 の交点の x 座標は，

$$x=\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\quad\cdots答$$

問 2　C_1 と C_2 の交点のうち $x=\sqrt{3}$ であるものを A，$x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ であるものを B とする．このとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分は図 1 の斜線部のようになる．この面積を S とする．

(図 1)



これらの曲線を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍，y 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍縮小し，楕円 C_1 が単位円となるようにする．

C_1，C_2 の縮小後の曲線を $C_1{}'$，$C_2{}'$ とすると，

$C_2{}'$ の方程式は，

$$\sqrt{3}\,y=-(2x)^3+\frac{7}{2}\cdot2x\Longleftrightarrow\sqrt{3}\,y=-8x^3+7x$$

であり，これを極方程式で表すと，

$$\sqrt{3}\,r\sin\theta=-8r^3\cos^3\theta+7r\cos\theta\quad\cdots①$$

$C_1{}'$ と $C_2{}'$ で囲まれる部分は第一象限にあるから，$r\fallingdotseq0$，$\cos\theta\fallingdotseq0$ と考えてよく，$C_2{}'$ の極方程式 ① は，次のようになる．

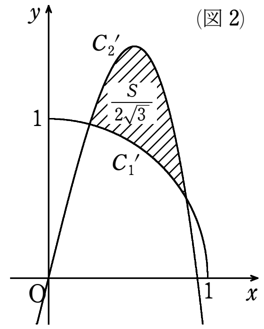
$$r^2=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{\cos^2\theta}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)$$

また，$C_1{}'$ と $C_2{}'$ の交点の x 座標は，問 1 の答えを 2 で割って，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

これらの値は，$\cos\frac{\pi}{6}$，$\cos\frac{5\pi}{12}$ の値と一致する．

(図 2)



したがって，半径 1，中心角 $\frac{\pi}{4}\left(=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)$ の扇形の面積 $\frac{\pi}{8}$ と $\frac{S}{2\sqrt{3}}$ の和は，次の定積分 I の値に一致する．

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{12}}r^2d\theta$$

$$=\frac{1}{16}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{12}}\left(\frac{7}{\cos^2\theta}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{16}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{12}}(7-\sqrt{3}\tan\theta)(\tan\theta)'d\theta$$

$u=\sqrt{3}\tan\theta$ と置換すると，$\frac{1}{\sqrt{3}}du=(\tan\theta)'d\theta$ であるから，

$$I=\frac{1}{16\sqrt{3}}\int_1^{3+2\sqrt{3}}(7-u)du=\frac{1}{16\sqrt{3}}\left[7u-\frac{1}{2}u^2\right]_1^{3+2\sqrt{3}}=\frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

したがって，

$$\frac{\pi}{8}+\frac{S}{2\sqrt{3}}=\frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\Longleftrightarrow S=\frac{2+4\sqrt{3}-\sqrt{3}\pi}{4}\quad\cdots答$$

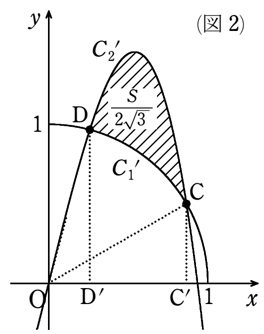
別解

図 2 において，$C_1{}'$ と $C_2{}'$ の交点を C，D とし，

C，D から x 軸に下ろした垂線の足を C′，D′ とする．

このとき，

(図 2)



$$\frac{S}{2\sqrt{3}}+(扇形\ \mathrm{OCD})+\triangle\mathrm{OCC'}$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}(-8x^3+7x)dx+\triangle\mathrm{ODD'}$$

したがって，

$$S=\frac{2+4\sqrt{3}-\sqrt{3}\pi}{4}\quad\cdots答$$

［V］

以下の各問いに答えよ．

問１　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}$$

問２　すべての自然数 k と $0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^k-\frac{k}{6}x^{k+2}\leqq \sin^k x\leqq x^k$$

ただし $\sin^k x=(\sin x)^k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ とする．

問３　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}$$

ただし数列 a_k に対して，

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

である．

問１　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2n^2}}$，

$U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{(n-1)^4+k^2(n-1)^2}}$ とおくと，$T_n<S_n<U_n$ が成り立つ．

このとき，

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

また，

$$U_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2n^2}}=T_n+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+(n+1)^2n^2}}$$

$$=T_n+\frac{n+1}{n\sqrt{n^2+(n+1)^2}}=T_n+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n^2+(n+1)^2}}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}U_{n+1}=\lim_{n\to\infty}T_n+0=\sqrt{2}-1$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}U_n=\sqrt{2}-1$ が成り立ち，はさみうちの原理より，

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}S_n=\sqrt{2}-1\quad\cdots\text{答}$$

問２　$x=0$ のとき $\sin x=x=0$

また，一般に $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin x<x$ が成り立つ．

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\sin x\leqq x$ が成り立ち，両辺を k 乗することで，

$$\sin^k x\leqq x^k\quad\cdots①$$

を得る．次に，

$$x^k-\frac{k}{6}x^{k+2}\leqq\sin^k x$$

を示す．まずは，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$x-\frac{1}{6}x^3\leqq\sin x$$

が成り立つことを示す．

$$f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

とおくと，

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2,\qquad f''(x)=-\sin x+x\geqq 0$$

$f''(x)\geqq 0$ より，$f'(x)$ は単調増加であるから，

$$f'(x)\geqq f'(0)=0$$

$f'(x)\geqq 0$ より，$f(x)$ も単調増加であるから，

$$f(x)\geqq f(0)=0$$

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{1}{6}x^3\leqq\sin x$ が成り立ち，両辺を k 乗することで，

$$x^k\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^k\leqq\sin^k x\quad\cdots②$$

を得る．さらに，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$1-\frac{k}{6}x^2\leqq\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^k\quad\cdots③$$

が成り立つことを示す．$t=\dfrac{1}{6}x^2$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{6}$ であり，③ は，

$$1-kt\leqq(1-t)^k$$

となる．そこで，

$$g(t)=(1-t)^k-1+kt\quad\left(0\leqq t\leqq\frac{1}{6}\right)$$

とおくと，

$$g'(t)=-k(1-t)^{k-1}+k=k\{1-(1-t)^{k-1}\}\geqq 0$$

$g'(t)\geqq 0$ より，$g(t)$ は単調増加であるから，

$$g(t)\geqq g(0)=0$$

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ のとき ③ が成り立ち，② とあわせることで，

$$x^k\left(1-\frac{k}{6}x^2\right)\leqq\sin^k x\iff x^k-\frac{k}{6}x^{k+2}\leqq\sin^k x\quad\cdots④$$

を得る．①，④ より，題意の不等式が成り立つことが示される．　…答

問３　$P_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}$ とおくと，

$$\log P_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{\frac{k}{n^2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1+kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

n は自然数であるから，$0\leqq\dfrac{1}{n}\leqq 1$ が成り立つ．

そこで，問２において，$x=\dfrac{1}{n}$ とおくと，

$$\frac{1}{n^k}-\frac{k}{6n^{k+2}}\leqq\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\leqq\frac{1}{n^k}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1+kn^{k-1}\left(\frac{1}{n^k}-\frac{k}{6n^{k+2}}\right)\right\}\leqq\log P_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+kn^{k-1}\cdot\frac{1}{n^k}\right)$$

$$\iff\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1+\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{6n^2}\right)\right\}\leqq\log P_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1+\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{6n^2}\right)\right\}\leqq\log P_n$ の部分について，さらに考えると，

$$\log P_n\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1+\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{6n^2}\right)\right\}$$

$$\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1+\frac{k}{n}\left(1-\frac{n}{6n^2}\right)\right\}$$

$$\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left\{1-\frac{1}{6n}+\frac{k}{n}\left(1-\frac{1}{6n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{1}{6n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1-\frac{1}{6n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\log\left(1-\frac{1}{6n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1-\frac{1}{6n}\right)$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1-\frac{1}{6n}\right)\leqq\log P_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

この式において，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1-\frac{1}{6n}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\log 1=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\log(1+x)\,dx$$

$$=\int_1^2(u-1)\log u\,du\qquad(u=1+x\text{ と置換})$$

$$=\int_1^2\left(\frac{u^2}{2}-u\right)'\log u\,du$$

$$=\left[\left(\frac{u^2}{2}-u\right)\log u\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{u^2}{2}-u\right)\frac{1}{u}du$$

$$=0+\int_1^2\left(1-\frac{u}{2}\right)du=\left[u-\frac{u^2}{4}\right]_1^2=\frac{1}{4}$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log P_n=\frac{1}{4}$ となるから，

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log P_n}=e^{\frac{1}{4}}\quad\cdots\text{答}$$