1． 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(1) 1の数字が書かれたカードが1枚，2の数字が書かれたカードが2枚，3の数字が書かれたカードが3枚，4の数字が書かれたカードが4枚の合計10枚のカードがある．カードをよく混ぜて，1枚ずつ3枚のカードを取り出し，取り出した順に左から並べて3桁の整数 N をつくる．このとき，N が3の倍数である確率は $\boxed{(ア)}$，6の倍数である確率は $\boxed{(イ)}$ である．

(2) 実数 x，y が $|2x+y|+|2x-y|=4$ をみたすとき，$2x^2+xy-y^2$ のとり得る値の範囲は $\boxed{(ウ)}\leqq 2x^2+xy-y^2\leqq\boxed{(エ)}$ である．

(1) $\boxed{1}$ が1枚，$\boxed{2}$ が2枚，$\boxed{3}$ が3枚，$\boxed{4}$ が4枚の計10枚から3枚を引いて並べるので，全事象の場合の数は，

$${}_{10}P_3=10\cdot9\cdot8\ (通り)$$

このうち，N が3の倍数となる組み合わせを考えると，

(ア) $\boxed{1}$，$\boxed{4}$ の5枚の中から3枚をとって並べる．

(イ) $\boxed{3}$ の3枚の中から3枚をとって並べる．

(ウ) $\{\boxed{1}, \boxed{4}\}$ の中から1枚，$\boxed{2}$ の中から1枚，$\boxed{3}$ の中から1枚をとって並べる．

したがって，それぞれの場合の数を考えると，

(ア) ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3$ (通り)

(イ) ${}_3P_3=3\cdot2\cdot1$ (通り)

(ウ) ${}_5C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot3!=5\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2\cdot1$ (通り)

である．したがって，

$$\frac{60+6+180}{10\cdot9\cdot8}=\frac{41}{120}\quad\cdots\text{答}$$

また，N が6の倍数となるのは，上記の場合のうち，一の位の数字が偶数となる確率を求めればよい．

(ア)のうち，一の位の数が偶数となるのは，一の位に 4 が入り，百・十の位には $\boxed{1}$，$\boxed{4}$ のいずれでもよいので，

$${}_4C_1\cdot{}_4P_2=48\ (通り)$$

(イ)のうち，一の位の数が偶数となる並べ方は存在しない．

(ウ)のうち，一の位の数が偶数となるのは，以下の2つの場合がある．

$\boxed{2}$ が一の位にあるとき，百・十の位は，$\{\boxed{1}, \boxed{4}\}$ の中から1枚，$\boxed{3}$ の中から1枚をとって並べるので，

$${}_2C_1\cdot{}_5C_1\cdot{}_3C_1\cdot2!=60\ (通り)$$

$\boxed{4}$ が一の位にあるとき，百・十の位は，$\boxed{2}$ の中から1枚，$\boxed{3}$ の中から1枚をとって並べるので，

$${}_4C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot2!=48\ (通り)$$

したがって，

$$\frac{48+60+48}{10\cdot9\cdot8}=\frac{13}{60}\quad\cdots\text{答}$$

(2) $2x+y=X$，$2x-y=Y$ とおくと，$x=\dfrac{X+Y}{4}$，$y=\dfrac{X-Y}{2}$ である．このとき (X, Y) は等式 $|X|+|Y|=4$ …① を満たす．

$$I=2x^2+xy-y^2=2\left(\frac{X+Y}{4}\right)^2+\frac{X+Y}{4}\cdot\frac{X-Y}{2}-\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3XY-Y^2}{4}$$

(ア) $X\geqq0$，$Y\geqq0$ のとき

① より，$X=4-Y$，$0\leqq Y\leqq4$ であるから，

$$I=\frac{3}{4}(4-Y)Y-\frac{1}{4}Y^2=-Y^2+3Y=-\left(Y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

したがって，最大値は $Y=\dfrac{3}{2}$ のとき $\dfrac{9}{4}$，最小値は $Y=4$ のとき 0．

(イ) $X\geqq0$，$Y\leqq0$ のとき

① より，$X=4+Y$，$-4\leqq Y\leqq0$ であるから，

$$I=\frac{3}{4}(4+Y)Y-\frac{1}{4}Y^2=\frac{1}{2}Y^2+3Y=\frac{1}{2}(Y+3)^2-\frac{9}{2}$$

したがって，最大値は $Y=0$ のとき 0，最小値は $Y=-3$ のとき $-\dfrac{9}{2}$．

(ウ) $X\leqq0$，$Y\geqq0$ のとき

① より，$X=Y-4$，$0\leqq Y\leqq4$ であるから，

$$I=\frac{3}{4}(Y-4)Y-\frac{1}{4}Y^2=\frac{1}{2}Y^2-3Y=\frac{1}{2}(Y-3)^2-\frac{9}{2}$$

したがって，最大値は $Y=0$ のとき 0，最小値は $Y=3$ のとき $-\dfrac{9}{2}$．

(エ) $X\leqq0$，$Y\leqq0$ のとき

① より，$X=-4-Y$，$-4\leqq Y\leqq0$ であるから，

$$I=\frac{3}{4}(-4-Y)Y-\frac{1}{4}Y^2=-Y^2-3Y=-\left(Y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

したがって，最大値は $Y=-\dfrac{3}{2}$ のとき $\dfrac{9}{4}$，最小値は $Y=4$ のとき 0．

(ア)〜(エ) より，

$$-\frac{9}{2}\leqq2x^2+xy-y^2\leqq\frac{9}{4}\quad\cdots\text{答}$$

別解 置換せず，対称性を用いると計算が楽．

$|2x+y|+|2x-y|=4$ …① とする．

(ⅰ) $2x+y\geqq0$，$2x-y\geqq0$ のとき，

① $\iff (2x+y)+(2x-y)=4 \iff x=1$

(ⅱ) $2x+y\geqq0$，$2x-y\leqq0$ のとき，

① $\iff (2x+y)-(2x-y)=4 \iff y=2$

(ⅲ) $2x+y\leqq0$，$2x-y\geqq0$ のとき，

① $\iff -(2x+y)+(2x-y)=4 \iff y=-2$

(ⅳ) $2x+y\leqq0$，$2x-y\leqq0$ のとき，

① $\iff -(2x+y)-(2x-y)=4 \iff x=-1$

したがって，A(1, 2)，B(−1, 2)，C(−1, −2)，D(1, −2) とすると，

① の表す図形は長方形 ABCD の周である．

さらに，$f(x, y)=2x^2+xy-y^2$ とおく．

このとき，$f(-x, -y)=f(x, y)$ であるから，原点 O に関して対称な2点において $f(x, y)$ は同一の値をとる．

したがって，長方形 ABCD の周のうち，線分 AB，AD 上のみを考えれば十分である．

(ア) 線分 AB ($y=2$，$-1\leqq x\leqq1$) において，

$f(x, y)=f(x, 2)=2x^2+2x-4=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}$ であるから，$-1\leqq x\leqq1$ のとき，

$$f\left(-\frac{1}{2}, 2\right)\leqq f(x, y)\leqq f(1, 2)\iff -\frac{9}{2}\leqq f(x, y)\leqq0\quad\cdots②$$

(イ) 線分 AD ($x=1$，$-2\leqq y\leqq2$) において，

$f(x, y)=f(1, y)=-y^2+y+2=-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ であるから，$-2\leqq y\leqq2$ のとき，

$$f(1, -2)\leqq f(x, y)\leqq f\left(1, \frac{1}{2}\right)\iff -4\leqq f(x, y)\leqq\frac{9}{4}\quad\cdots③$$

②，③ の和集合をとって，

$$-\frac{9}{2}\leqq2x^2+xy-y^2\leqq\frac{9}{4}\quad\cdots\text{答}$$

2． n は自然数とし，微分可能な関数 $f_n(x)$ は等式 $f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+\int_0^x e^{-t}f_n(x-t)dt$ をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $\dfrac{d}{dx}f_n(x)$ を求めよ．

(2) m は2以上の自然数とする．$x>0$ のとき，不等式 $e^{-x}x^m \leqq e^{-m}m^m$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(1) $f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+\int_0^x e^{-t}f_n(x-t)dt$ …① の定積分において，$s=x-t$ と置換すると，

$$f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+\int_x^0 e^{-(x-s)}f_n(s)\cdot(-ds)$$
$$=e^{-x}x^{n+1}+e^{-x}\int_0^x e^s f_n(s)ds$$

したがって，

$$e^x f_n(x)=x^{n+1}+\int_0^x e^s f_n(s)ds$$

両辺を x で微分すると，

$$e^x f_n(x)+e^x\cdot\frac{d}{dx}f_n(x)=(n+1)x^n+e^x f_n(x)$$

$$\iff \frac{d}{dx}f_n(x)=(n+1)e^{-x}x^n \quad \cdots 答$$

(2) $g(x)=e^{-x}x^m\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=-e^{-x}x^m+me^{-x}x^{m-1}$$
$$=e^{-x}x^{m-1}(m-x)$$

増減表は右のようになるから，

x	(0)	$\cdots$	m	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗		↘

$$g(x)\leqq g(m) \iff e^{-x}x^m\leqq e^{-m}m^m$$

が成り立つ． …終

(3) (1) の結果から，定数 a を用いて，

$$f_n(x)=(n+1)\int_a^x e^{-t}t^n dt$$

と表すことができる．
さらに，① より $f_n(0)=0$ であるから，$a=0$ とすればよく，

$$f_n(x)=(n+1)\int_0^x e^{-t}t^n dt \quad \cdots ②$$

が成り立つ．
一方，積の微分から，自然数 k に対して，

$$(e^{-t}t^k)'=-e^{-t}t^k+ke^{-t}t^{k-1}$$

区間 $0\leqq t\leqq x$ において両辺を積分すると，

$$\Big[e^{-t}t^k\Big]_0^x=-\int_0^x e^{-t}t^k dt+k\int_0^x e^{-t}t^{k-1}dt$$

$$\iff e^{-x}x^k=-\frac{f_k(x)}{k+1}+f_{k-1}(x)$$

両辺を $k!$ で割ると，

$$\frac{e^{-x}x^k}{k!}=-\frac{f_k(x)}{(k+1)!}+\frac{f_{k-1}(x)}{k!}$$

② を $n=0$ においても定義できると考えると，

$$\sum_{k=1}^n\frac{e^{-x}x^k}{k!}=\sum_{k=1}^n\left\{-\frac{f_k(x)}{(k+1)!}+\frac{f_{k-1}(x)}{k!}\right\}=-\frac{f_n(x)}{(n+1)!}+\frac{f_0(x)}{1!}\quad (n\geqq 1)$$

この式において，

$$f_0(x)=\int_0^x e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^x=1-e^{-x}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^n\frac{e^{-x}x^k}{k!}=-\frac{f_n(x)}{(n+1)!}+1-e^{-x}$$

$$\iff f_n(x)=(n+1)!\left(1-e^{-x}-\sum_{k=1}^n\frac{e^{-x}x^k}{k!}\right)\quad\cdots ③$$

そこで，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}x^k\ (k\geqq 1)$ を求める．
(2) において，$m=k+1\ (\geqq 2)$ とおくと，

$$e^{-x}x^{k+1}\leqq e^{-k-1}(k+1)^{k+1}$$

$x>0$ より，

$$0<e^{-x}x^k\leqq\frac{e^{-k-1}(k+1)^{k+1}}{x}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-k-1}(k+1)^{k+1}}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理を用いて，

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^k=0$$

この結果を ③ に適用して，

$$\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\lim_{x\to\infty}(n+1)!\left(1-e^{-x}-\sum_{k=1}^n\frac{e^{-x}x^k}{k!}\right)=(n+1)!\left(1-0-\sum_{k=1}^n 0\right)$$
$$=(n+1)!\quad\cdots 答$$

3．自然数 n に対して，整式 $f_n(x)$ を次のように定める．

$$f_1(x)=x^2+x-\frac{1}{4}$$

$$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))\quad(n\geqq 2)$$

$f_n(x)$ を x^2 で割ったときの余りを a_nx+b_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，b_2 の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

$f_1(x)=x^2+x-\dfrac{1}{4}$ より，$a_1=1$，$b_1=-\dfrac{1}{4}$ …①

また，題意より $f_n(0)=b_n$，$f_n{}'(0)=a_n$ である．

$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))=\{f_{n-1}(x)\}^2+f_{n-1}(x)-\dfrac{1}{4}$ …② において $x=0$ とすると，

$$f_n(0)=\{f_{n-1}(0)\}^2+f_{n-1}(0)-\frac{1}{4}\iff b_n=b_{n-1}{}^2+b_{n-1}-\frac{1}{4}\quad\cdots③$$

また，② の両辺を x で微分すると，

$$f_n{}'(x)=\{2f_{n-1}(x)+1\}f_{n-1}{}'(x)$$

$x=0$ として，

$$f_n{}'(0)=\{2f_{n-1}(0)+1\}f_{n-1}{}'(0)\iff a_n=(2b_{n-1}+1)a_{n-1}\quad\cdots④$$

(1) ①，③，④ より，

$$a_2=(2b_1+1)a_1=\frac{1}{2},\quad b_2=b_1{}^2+b_1-\frac{1}{4}=-\frac{7}{16}\quad\cdots答$$

(2) ④ を繰り返し用いて，

$$a_n=(2b_{n-1}+1)(2b_{n-2}+1)\cdots\cdots(2b_2+1)(2b_1+1)a_1$$

$$=2^{n-1}\left(b_{n-1}+\frac{1}{2}\right)\left(b_{n-2}+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\left(b_2+\frac{1}{2}\right)\left(b_1+\frac{1}{2}\right)\quad\cdots⑤$$

また，③ の両辺に $\dfrac{1}{2}$ を加えて，

$$b_n+\frac{1}{2}=\left(b_{n-1}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$b_n+\dfrac{1}{2}$ は常に正であるから，両辺の対数をとると，

$$\log_2\left(b_n+\frac{1}{2}\right)=2\log_2\left(b_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$$

したがって，

$$\log_2\left(b_n+\frac{1}{2}\right)=2^{n-1}\log_2\left(b_1+\frac{1}{2}\right)=2^{n-1}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=2^{n-1}\cdot(-2)=-2^n$$

これより，$b_n+\dfrac{1}{2}=2^{-2^n}$ であるから，⑤ を用いて，

$$a_n=2^{n-1}\cdot2^{-2^{n-1}}\cdot2^{-2^{n-2}}\cdot\cdots\cdots\cdot2^{-2^2}\cdot2^{-2^1}\quad=2^{c_n}$$

となる．ただし，

$$c_n=n-1-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^1)=n-1-\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=n+1-2^n$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$c_n=n+1-(1+1)^n\leqq n+1-({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2)=-\frac{n(n-1)}{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n(n-1)}{2}\right\}=-\infty$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=-\infty$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2^{c_n}=0\quad\cdots答$$

別解　商を設定して解く．

(1) $f_1(x)=x^2+x-\dfrac{1}{4}$ であるから，$a_1=1$，$b_1=-\dfrac{1}{4}$ である．また，x の整式 $g_n(x)$ を用いて，$f_n(x)=x^2g_n(x)+a_nx+b_n$ とおく．

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^2+f_n(x)-\frac{1}{4}$$

$$=\{x^2g_n(x)+a_nx+b_n\}^2+x^2g_n(x)+a_nx+b_n-\frac{1}{4}$$

ここで，x の係数と定数項を取り出すことにより，

$$a_{n+1}=2a_nb_n+a_n\quad\cdots①$$

$$b_{n+1}=b_n{}^2+b_n-\frac{1}{4}\quad\cdots②$$

これを用いると，

$$a_2=\frac{1}{2},\quad b_2=-\frac{7}{16}\quad\cdots答$$

である．

4． O を原点とする座標空間内に，定点 A$(4,\ 0,\ 0)$ と 3 点

$\mathrm{P}(4\cos\theta,\ 2\sqrt{2}\sin\theta,\ 2\sqrt{2}\sin\theta)$，$\mathrm{Q}\left(4\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$，R があり，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=4\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ をみたしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ の最大値と，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ が最大となるときを考える．O を端点とし線分 PR の中点を通る半直線上に，点 M を $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=4$ となるようにとるとき，△MOA の面積を求めよ．

(1)
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{(4\cos\theta)^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)^2}=4$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=4$$
である．
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=32-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}$$
ここで，
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}4\cos\theta\\2\sqrt{2}\sin\theta\\2\sqrt{2}\sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\cos\theta\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\end{pmatrix}=16\cos^2\theta+4\sin^2\theta$$
$$=4(3\cos^2\theta+1)$$
また，
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{(4\cos\theta)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)^2}$$
$$=\sqrt{15\cos^2\theta+1}$$
であるから，
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=32-\frac{32(3\cos^2\theta+1)}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}=32\left(1-\frac{3\cos^2\theta+1}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}\right)$$
ここで，$\sqrt{15\cos^2\theta+1}=X$ とおくと，$1\leqq X\leqq 4$ であり，
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=32\left\{1-\frac{1}{5}\left(X+\frac{4}{X}\right)\right\}$$
ここで，$X>0$，$\dfrac{4}{X}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，
$$X+\frac{4}{X}\geqq 2\sqrt{X\cdot\frac{4}{X}}=4\quad(\text{等号成立は } X=2)$$
すなわち，
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\leqq 32\left(1-\frac{1}{5}\cdot 4\right)=\frac{32}{5}$$
となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ の最大値は $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ である．　…答

また，等号成立は $X=2$ のときであるから，
$$15\cos^2\theta+1=4\iff\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$．　…答

(2) (1) のとき，$(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である．したがって，

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\ \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$ となるので，線分 PR の中点を N とすると，
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$
ここで，点 M は半直線 ON 上にあることから，∠AOM は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ のなす角である．つまり，2 つのベクトル
$$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\vec{v_2}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$
のなす角なので内積を利用して，
$$\cos\angle\mathrm{AOM}=\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
ゆえに △MOA の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$　…答

別解　すべての点が平面 $y=z$ 上の点を利用している点を考え，回転移動する．

与えられた点 O，A，P，Q，R，M を x 軸正方向から見て，x 軸を中心に $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転すると，どの点も xy 平面上に移る（点 O，A の位置は変わらない）．

点 P，Q，R，M の移動後の点を P′，Q′，R′，M′ とする．このとき，
$$\mathrm{P}'(4\cos\theta,\ 4\sin\theta),\quad \mathrm{Q}'(4\cos\theta,\ \sin\theta)$$
であり，(1) より $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるから，
$$\mathrm{P}'\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{8}{\sqrt{5}}\right),\quad \mathrm{Q}'\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
したがって，点 O，P′ を通る直線の方程式は $y=2x$，点 O，Q′，R′ を通る直線の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x$ である．

この 2 直線は $y=x$ に関して対称であり，また $\mathrm{OP}'=\mathrm{OR}'(=4)$ であるから，半直線 OM′ を表す式は $y=x\ (x\geqq 0)$ である．

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}'}|=4$ であるから，$\mathrm{M}'(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

したがって，
$$\triangle\mathrm{MOA}=\triangle\mathrm{M'OA}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\quad\text{…答}$$

【講評】

1．やや煩雑だが，確実に正解を取るべき問題。
　方針は見えても、うまく処理しないと手間と時間が掛かり、難しい問題。

2．慈恵レベルならば、典型問題で、確実に取るべき問題だが、ここを取れるかどうかがポイントかもしれない。
　糸口を見つけることが困難であり，できなくても問題ないだろう。

3．基本問題であり、絶対に落とせない。
　漸化式を作ることがポイントだが，そこまで来ても，その処理が困難であり，時間内にやりきることは困難だろう。

4．全体の中で一番優しい問題である。計算量を考えると決して簡単ではないが，合格を勝ち取るには落とせない。

全体として，完答が難しい仕様になっている。時間配分や計算の手際を誤ると半分も取れないかもしれない。真面目に全てを解こうとせず，簡単な問題を見つけて如何に正確に解けるかがポイントとなる。55% で十分勝負になると考えられる。 また，2016，2017 入試と続いて出題された整数問題が今年は出題されなかった。