YMS 2018年度 解答速報

東北医科薬科大学 数学

問題 [I]

実数 x は $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ を動くとし，関数 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin t - \tan x \cos t|dt$ を考える．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}-\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $f(x)$ を $\sin x$，$\cos x$ の式で表すと

$$f(x)=\frac{\boxed{\text{ウ}}-\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\sin x-\left(\boxed{\text{オ}}+\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\right)\cos x}{\boxed{\text{キ}}\cos x}$$ である．

(3) $f(x)$ の最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，

このとき $\sin x=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

(2) $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ より，$|\sin t-\tan x\cos t|=\cos t|\tan t-\tan x|$ と変形できるから，

$$0 \leqq t \leqq x \Longrightarrow \sin t-\tan x\cos t \leqq 0$$

$$x \leqq t \leqq \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \sin t-\tan x\cos t \geqq 0$$

したがって，

$$f(x)=-\int_0^x(\sin t-\tan x\cos t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{4}}(\sin t-\tan x\cos t)dt$$

$$=-\Big[-\cos t-\tan x\sin t\Big]_0^x+\Big[-\cos t-\tan x\sin t\Big]_x^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4-\sqrt{2}\sin x-(2+\sqrt{2})\cos x}{2\cos x} \quad \cdots \text{答}$$

【別解】

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin t-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos t\right|dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin t\cos x-\cos t\sin x|}{\cos x}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin(t-x)|}{\cos x}dt$$

$t-x=u$ と置換すると，$f(x)=\int_{-x}^{\frac{\pi}{4}-x}\frac{|\sin u|}{\cos x}du$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ より，$-\frac{\pi}{4} \leqq -x \leqq 0 \leqq \frac{\pi}{4}-x \leqq \frac{\pi}{4}$ であるから，

$$f(x)\cos x=\int_{-x}^{\frac{\pi}{4}-x}|\sin u|du=-\int_{-x}^0\sin u\,du+\int_0^{\frac{\pi}{4}-x}\sin u\,du$$

$$=\Big[\cos u\Big]_{-x}^0-\Big[\cos u\Big]_0^{\frac{\pi}{4}-x}=1-\cos(-x)-\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1\right\}$$

$$=2-\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{4-\sqrt{2}\sin x-(2+\sqrt{2})\cos x}{2}$$

したがって，$f(x)=\frac{4-\sqrt{2}\sin x-(2+\sqrt{2})\cos x}{2\cos x}$ …答

(1) (2) より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-(2+\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1 \quad \cdots \text{答}$$

(3) $f(x)=\frac{4-\sqrt{2}\sin x-(2+\sqrt{2})\cos x}{2\cos x}=\frac{2}{\cos x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ より，

$$f'(x)=\frac{2\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sqrt{2}}{2\cos^2 x}=\frac{4\sin x-\sqrt{2}}{2\cos^2 x}$$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ の範囲において，$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を満たす実数 x がただ1つ存在するので，この値を α とおくと，次の増減表が得られる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	最小	↗	

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{14}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}$ であるから，$f(x)$ の最小値は，

$$f(\alpha)=\frac{2}{\cos\alpha}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\alpha-\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\frac{8}{\sqrt{14}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}-2}{2} \quad \cdots \text{答}$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \cdots \text{答}$$

【別解】

$f(x)=\frac{4-\sqrt{2}\sin x-(2+\sqrt{2})\cos x}{2\cos x}=k$ とおく．さらに，$\cos x=X$，$\sin x=Y$ とおくとき，

$$\frac{4-\sqrt{2}Y-(2+\sqrt{2})X}{2X}=k \Longleftrightarrow (2k+2+\sqrt{2})X+\sqrt{2}Y-4=0 \quad \cdots ①$$

ここで，$X^2+Y^2=1$ …② を満たすので，XY 平面上で直線 ① と円 ② が共有点を持つ条件を考えると，

$$\frac{|-4|}{\sqrt{(2k+2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}} \leqq 1$$

$f(x)$ は明らかに正であり，$k>0$ の範囲で考えればよいので，これを解くと，

$$k \geqq \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}-2}{2}$$

となるので，k の最小値は，$\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}-2}{2}$ となる．さらにこのとき，直線 ① と直交し，原点を通る直線との交点を考えると，

$$\sqrt{14}X+\sqrt{2}Y-4=0,\ \sqrt{2}X-\sqrt{14}Y=0$$

これを解くと，$\sin x=Y=\frac{\sqrt{2}}{4}$ となる．

問題 [II]

3点 A$(0,\ -6,\ 7)$，B$(0,\ 2,\ 11)$，C$(4,\ 2,\ 11)$ の作る △ABC を考える．実数 x は $0 \leqq x \leqq 4$ とする．点 P$(x,\ 0,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で △ABC を切ったときの切り口となる線分を l とおく．点 Q は線分 l 上を動くとする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) PQ の最大値は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である．

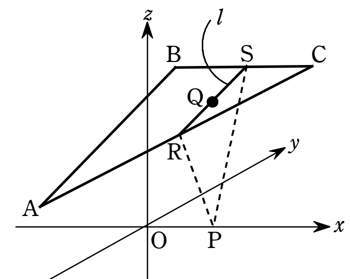
(2) PQ の最小値 m は，

$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{ウ}}$ のとき，$m=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ で，

$\boxed{\text{ウ}} \leqq x \leqq 4$ のとき，$m=\sqrt{\boxed{\text{カ}}x^2-\boxed{\text{キク}}x+\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

(3) △ABC を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V は $V=\boxed{\text{サシス}}\pi$ である．

(1) 題意の平面と線分 AC，BC との交点を R，S とおくと，[図1] のような図が描ける．



[図 1]

s，t を実数とすると，直線 AC，BC は各々

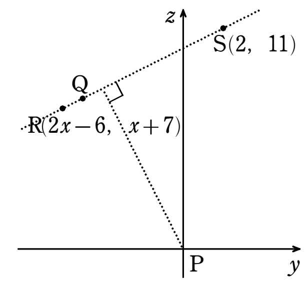
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(4s,\ 8s-6,\ 4s+7)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4t,\ 2,\ 11)$$

とかける．これらの x 座標が x となるとき $4s=x$，$4t=x$ であるから，各々代入すると

$$\mathrm{R}(x,\ 2x-6,\ x+7),\ \mathrm{S}(x,\ 2,\ 11)$$

となる．ここで，R について $y=2x-6$，$z=x+7$ とし x を消去すると $y-2z+20=0$ となるから，題意の平面での切り口は[図2]のようになる．また，S はこの式を満たすので，S はこの直線上にいることもわかる．



[図 2]

$$\mathrm{PR}=\sqrt{(2x-6)^2+(x+7)^2}=\sqrt{5x^2-10x+85}$$

$$=\sqrt{5(x-1)^2+80}$$

は，$0 \leqq x \leqq 4$ において $4\sqrt{5} \leqq \mathrm{PR} \leqq 5\sqrt{5}$ となる．一方，PS は x の値によらず $5\sqrt{5}$ となる．

Q は RS 上を動くので，求める最大値は $5\sqrt{5}$ …答

(2) 直線 $y-2z+20=0$ と，P を通り，この直線に垂直な直線 $z=-2y$ との交点を求めると $(-4,\ 8)$ となるから，$2x-6=-4$ を解くと $x=1$ が得られる．x が増加すると，R は直線 $y-2z+20=0$ 上を y 軸正の方向に動くので，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，Q を，P から直線 $y-2z+20=0$ に下ろした垂線の足に置くと PQ は最小となる．このとき，PQ は，P と直線 $y-2z+20=0$ との距離を考えて

$$\mathrm{PQ}=\frac{|0-2\cdot 0+20|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}$$

となる．また，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，Q は R と一致すれば PQ は最小となるので

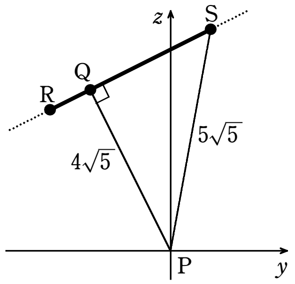
$$\mathrm{PQ}=\sqrt{5x^2-10x+85}$$

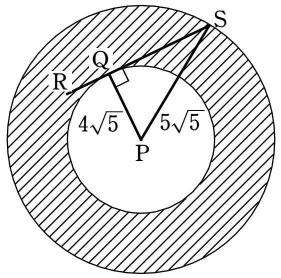
以上から

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$m=4\sqrt{5}$，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，$m=\sqrt{5x^2-10x+85}$ …答

(3) 求める回転体は，線分 RS が通過する部分を考えればよいから，P と線分 RS との最大距離・最小距離に着目して考える．

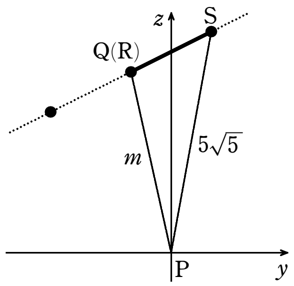
$0\leqq x\leqq 1$ のとき

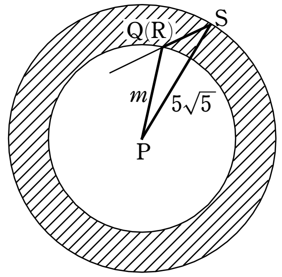




$$\int_0^1(\pi \mathrm{PS}^2-\pi \mathrm{PQ}^2)dx=\pi\int_0^1\{(5\sqrt{5})^2-(4\sqrt{5})^2\}dx=45\pi\Big[x\Big]_0^1=45\pi$$

$1\leqq x\leqq 4$ のとき





$$\int_1^4(\pi \mathrm{PS}^2-\pi m^2)dx=\pi\int_1^4\{(5\sqrt{5})^2-(\sqrt{5x^2-10x+85})^2\}dx$$

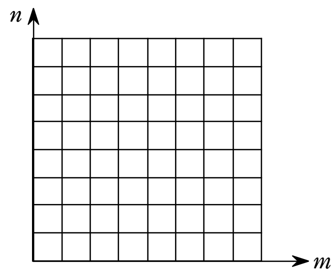
$$=\pi\int_1^4(-5x^2+10x+40)dx=90\pi$$

以上から，求める体積 V は　$V=45\pi+90\pi=135\pi$　…答

問題［Ⅲ］

平面上の点 P は最初 (0，0) にいるが，次の規則に従って移動する．1 個のさいころを投げて 1 の目がでたら x 軸正方向へ 2 だけ移動し，2 または 3 の目がでたら x 軸正方向へ 1 だけ移動し，4 の目がでたら y 軸正方向へ 2 だけ移動し，5 または 6 の目がでたら y 軸正方向へ 1 だけ移動する．4 回投げて移動したとき，点 P の座標を $(m,\ n)$ とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1)　$m+n$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，また，$m+n$ が最大値となる点 P の座標 $(m,\ n)$ の個数は $\boxed{\text{イ}}$ 個で，$m+n$ が最大値となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である．



(2)　$m+n$ の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である．また，$m+n$ が最小値となる点 P の座標 $(m,\ n)$ の個数は $\boxed{\text{キ}}$ 個で，$m+n$ が最小値となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

(3)　$m+n=7$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である．

(4)　$m+n=6$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である．

(5)　$m+n$ の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

【注意】問題訂正がありました．

（訂正前）$m+n$ の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

（訂正後）$m+n=k$ となる確率を p_k としたとき，$\displaystyle\sum_{k=\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{カ}}} kp_k$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

的中！

次のように事象を設定する．

事象 A：1 の目が出る，事象 B：2 または 3 の目が出る

事象 C：4 の目が出る，事象 D：5 または 6 の目が出る

また，それぞれの事象が起こる回数を a，b，c，d とおく．

(1)　$m+n$ が最大となるときを考える．移動が多い事象 A，C が計 4 回起こるとき，

$a+c=4$，$a\geqq 0$，$c\geqq 0$

を満たす場合は 5 通りあり，このそれぞれに対応して異なる点 $(m,\ n)$ が定まる．

$(a,\ c)=(4,\ 0)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(0,\ 4)$

$(m,\ n)=(8,\ 0)$，$(6,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(2,\ 6)$，$(0,\ 8)$

このとき $m+n=8$ となる．したがって，

$m+n$ の最大値は 8　…答

$(m,\ n)$ の個数は 5 個　…答

$m+n=8$ となる確率 p_8 は

$$p_8={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$=({}_4\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4)\left(\frac{1}{6}\right)^4=(1+1)^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{81}\quad\cdots\text{答}$$

(2)　$m+n$ が最小となるときを考える．移動が少ない事象 B，D が計 4 回起こるとき，

$b+d=4$，$b\geqq 0$，$d\geqq 0$

を満たす場合は 5 通りあり，このそれぞれに対応して異なる点 $(m,\ n)$ が定まる．

$(b,\ d)=(4,\ 0)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(0,\ 4)$

$(m,\ n)=(4,\ 0)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(0,\ 4)$

このとき $m+n=4$ となる．したがって，

$m+n$ の最小値は 4　…答

$(m,\ n)$ の個数は 5 個　…答

$m+n=4$ となる確率 p_4 は

$$p_4={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=({}_4\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4)\left(\frac{1}{3}\right)^4=(1+1)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{16}{81}\quad\cdots\text{答}$$

また，また，(1)(2) を考える際に，$m+n$ は方向を無視できるので，改めて事象を定めてもよい．

事象 E：$A\cup C$ つまり，1 または 4 の目が出る

事象 F：$B\cup D$ つまり，2 または 3 または 5 または 6 の目が出る

とおくとき，$m+n=8$ となる場合は，事象 E が 4 回起これればよいので，

$$p_8=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}\quad\cdots\text{答}$$

同様に，$m+n=4$ となる場合は，事象 F が 4 回起これればよいので，

$$p_4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}\quad\cdots\text{答}$$

(3)　$m+n=7$ となる場合は，事象 E が 3 回，事象 F が1 回起こる場合のみである．

$$p_7={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}\quad\cdots\text{答}$$

(4)　$m+n=6$ となる場合は，事象 E が 2 回，事象 F が2 回起こる場合のみである．

$$p_6={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}\quad\cdots\text{答}$$

(5)　$m+n=5$ となる場合は，事象 E が 1 回，事象 F が3 回起こる場合のみである．

$$p_5={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$\displaystyle\sum_{k=\boxed{\text{カ}}}^{\boxed{\text{ア}}} kp_k$ として考えた

したがって，求める数列和は，

$$\sum_{k=4}^{8}kp_k=4\cdot p_4+5\cdot p_5+6\cdot p_6+7\cdot p_7+8\cdot p_8$$

$$=4\cdot\frac{16}{81}+5\cdot\frac{32}{81}+6\cdot\frac{8}{27}+7\cdot\frac{8}{81}+8\cdot\frac{1}{81}$$

$$=\frac{16}{3}\quad\cdots\text{答}$$

【別解】

$m+n=4+i$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ となる確率は,

$$p_{i+4}={}_4\mathrm{C}_i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

したがって，求める数列和は,

$$\sum_{k=4}^{8}kp_k=\sum_{i=0}^{4}(4+i){}_4\mathrm{C}_i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$
$$=4\sum_{i=0}^{4}{}_4\mathrm{C}_i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i+\sum_{i=0}^{4}i{}_4\mathrm{C}_i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

ここで，$r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ を利用すると,

$$\sum_{i=0}^{4}i{}_4\mathrm{C}_i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i=\sum_{i=1}^{4}i{}_4\mathrm{C}_i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$
$$=\sum_{i=1}^{4}4\cdot{}_3\mathrm{C}_{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}\left(\frac{1}{3}\right)^i$$
$$=\sum_{j=0}^{3}4\cdot{}_3\mathrm{C}_j\left(\frac{2}{3}\right)^{3-j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}\quad(i=j+1\text{ とおいた})$$
$$=\frac{4}{3}\sum_{j=0}^{3}{}_3\mathrm{C}_j\left(\frac{2}{3}\right)^{3-j}\left(\frac{1}{3}\right)^j$$
$$=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{3}$$

したがって,

$$\sum_{k=4}^{8}kp_k=4\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}\quad\cdots\text{答}$$

（参考）二項分布の利用.

確率変数 $X=m+n$ とし，$Y=X-4$ とおく．確率変数 Y は二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う.

$$E(X)=E(Y)+4=4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{16}{3}$$

となる.

【別解】

1 回あたりの $m+n$ の増加量の平均（期待値）は

$$1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

なので，期待値の線形性を用いて,

$$\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

【講評】

出題は以下のよう

問題[Ⅰ]　絶対値を含む積分の最大・最小

問題[Ⅱ]　空間図形・回転体の体積

問題[Ⅲ]　確率

昨年に比べやや難化した．すべての問題が多くの受験生が苦手とする分野であり，気持ちを切らさずどこまで粘れたかが勝負の分かれ目となっただろう．テキストで同じような問題を繰り返し解いているので，YMSの生徒は健闘できただろう．

１次合格ラインは 65% 程度であろう．

的中！

YMS数学 前期テキストより的中が出ました!!

YMS数学（前期）テキスト① 99ページより抜粋

11－5C

さいころを振ったとき，平面上の $(x,\ y)$ にある点 P は，1，2，3 のいずれかの目が出ると $(x+1,\ y)$ に，4 の目が出ると $(x,\ y+1)$ に，5，6 のいずれかの目が出ると $(x-1,\ y-1)$ に移動する。はじめに原点にあった点 P について，次の問いに答えよ。

(1)　点 P が，6 回さいころを振ったときに点 $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，6 回さいころを振ったときに直線 $x=2$ 上にある確率を求めよ。

(3)　点 P が，6 回さいころを振ったときに直線 $x+y=3$ 上にある確率を求めよ。

YMS数学 後期 総合演習問題より的中が出ました!!

11－3C

実数 x に対して，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|\,dt$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値 を求めよ。

(2)　定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。