YMS 2018年度 解答速報 久留米大学医学部 数学

1

2 次曲線 $y=x^2$ と円 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ がただ 1 つの共有点 P をもち（a，b は実数で $a>0$，$b>0$ とする），点 P と円の中心を通る直線の傾きが $-\dfrac{1}{6}$ であるとき，点 P の座標の数値は $(x,\ y)=$ ① で，b の値は ② である。

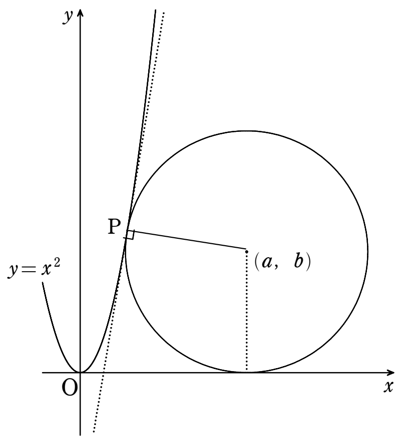
P における接線の傾きが 6 であればよい

$$y'=2x$$

より

$$2x=6 \qquad \therefore\ x=3$$

であるから P の座標は ①$\boxed{(3,\ 9)}$



次に P が円上に存在する条件は

$$(3-a)^2+(9-b)^2=b^2 \quad \cdots\text{(A)}$$

また，傾きの条件は

$$\frac{b-9}{a-3}=-\frac{1}{6}$$

整理して

$$a=57-6b \quad \cdots\text{(B)}$$

(A)，(B) から a を消去して

$$\{6(b-9)\}^2+(b-9)^2=b^2$$

$$37(b-9)^2=b^2 \quad \cdots\text{(C)}$$

$$36b^2-18\cdot 37b+37\cdot 81=0$$

9 で割って

$$4b^2-74b+37\cdot 9=0$$

解の公式から

$$b=\frac{37\pm\sqrt{37^2-37\cdot 36}}{4}=\frac{37\pm\sqrt{37}}{4}$$

条件 (B) より

$$a=57-6b>0 \iff b<\frac{19}{2}$$

であることに注意すると $b=$ ②$\boxed{\dfrac{37-\sqrt{37}}{4}}$

別解　図から $b<9$ であることがわかるので (C) において

$$\sqrt{37}\,(9-b)=b$$

を解いてもよい。

2

関数 $f(n)$ は，$f(n)=\lim\limits_{c\to\infty}\left\{\int_0^c x^{n-1}e^{-x}dx\right\}$ と定義されている。このとき，$f(1)=$ ③，$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=$ ④，$f(n)=$ ⑤ である。ただし，c は実数，n は自然数であり，$\lim\limits_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$（$k$ は自然数）とする。

$$f(1)=\lim_{c\to\infty}\left\{\int_0^c e^{-x}dx\right\}=\lim_{c\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^c=\lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{e^c}+1\right)=1$$

より $f(1)=$ ③$\boxed{1}$

また，

$$f(n+1)=\lim_{c\to\infty}\left\{\Big[x^n(-e^{-x})\Big]_0^c-\int_0^c nx^{n-1}(-e^{-x})dx\right\}$$

$$=\lim_{c\to\infty}\left\{-\frac{c^n}{e^c}+n\int_0^c x^{n-1}e^{-x}dx\right\}$$

$$=0+n\lim_{n\to\infty}\int_0^c x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$=nf(n)$$

注　題意から $f(n)$ の存在は仮定した。

よって

$$f(n+1)=nf(n) \iff \frac{f(n+1)}{f(n)}=\text{④}\boxed{n}$$

これより

$$\frac{f(n)}{f(n-1)}\frac{f(n-1)}{f(n-2)}\cdots\frac{f(2)}{f(1)}=(n-1)(n-2)\cdots 1$$

$$\frac{f(n)}{f(1)}=(n-1)!$$

$f(1)=1$ より

$$f(n)=\text{⑤}\boxed{(n-1)!}$$

3

関数 $f(x)$ は，$f(x)=ax^2+2(a-2)x+3a-2$ と定義されている。ただし，a は実数で $a\leqq 0$ とする。

(1)　$f(x)$ が 2 次関数であるとき，頂点の x の座標を a を用いて表すと ⑥ である。

(2)　$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は ⑦ である。

(3)　方程式 $f(x)=0$ が実数解を持つとき，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $a=$ ⑧ のとき ⑨ である。

(1)

$$f(x)=a\left(x+\frac{a-2}{a}\right)^2+\frac{2a^2+2a-4}{a}$$

より 頂点の x 座標は ⑥$\boxed{\dfrac{2-a}{a}}$

(2)　$a=0$ のとき $f(x)=-4x-2$ より最大値 $f(-2)=6$

$a<0$ のとき $y=f(x)$ の軸 $x=\dfrac{2-a}{a}=-1+\dfrac{2}{a}<-1$ であることに注意して

$\dfrac{2-a}{a}<-2$　すなわち　$-2<a<0$ のとき 最大値 $f(-2)=3a+6$

$-2\leqq\dfrac{2-a}{a}<-1$　すなわち　$a\leqq -2$ のとき 最大値 $f\left(\dfrac{2-a}{a}\right)=\dfrac{2a^2+2a-4}{a}$

以上をまとめると

⑦$\boxed{-2<a\leqq 0 \text{ のとき最大値 } 3a+6,\ \ a\leqq -2 \text{ のとき最大値 } \dfrac{2a^2+2a-4}{a}}$

(3)　$a=0$ のとき $f(x)=-4x-2$ より 最小値 $f(2)=-10$

$a<0$ のとき (2)と同様に，軸 <-1 であるから

最小値 $f(2)=11a-10$

また，$f(x)=0$ が実数解をもつのは

$$\text{頂点の } y \text{ 座標}=\frac{2a^2+2a-4}{a}\geqq 0$$

であるときで，$a<0$ に注意して

$$2(a-1)(a+2)\leqq 0 \quad \text{より} \quad -2\leqq a<0$$

したがって関数 $11a-10$ の $-2\leqq a\leqq 1$ における最小値は $a=-2$ のとき -32

$a=0$ のときも考えると

$a=$ ⑧$\boxed{-2}$ のとき ⑨$\boxed{-32}$

4

ガラス板 8 枚を光が透過すると，光の強さはガラスがないときの 80 % になった。各ガラス板の形状や特性は同じとする。

(1)　光が 1 枚ガラス板を透過すると，光の強さはガラスがないときの ⑩ % になる。

(2)　透過した光の強さをガラスがないときの 10 % 以下にするには，ガラス板は ⑪ 枚以上である。$\log_{10}2=0.301$ として計算すること。

(1)　1 枚透過して x % になるとして

$$\left(\frac{x}{100}\right)^8=\frac{80}{100}$$

よって

$$\frac{x}{100}=\sqrt[8]{0.8}$$

であるから

$$x=\text{⑩}\boxed{\sqrt[8]{0.8}\times 100}$$

(2)　n 枚以上必要であるとすると

$$\left(\frac{x}{100}\right)^n\leqq\frac{10}{100} \iff (0.8)^{\frac{n}{8}}\leqq\frac{1}{10} \iff \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{8}}\leqq 10^{-1}$$

常用対数をとって

$$\frac{n}{8}(\log_{10}8-1)\leqq -1 \iff n(0.903-1)\leqq -8 \iff -0.097n\leqq -8$$

より

$$n\geqq 82.4\cdots$$

したがって ⑪$\boxed{83}$ 枚以上必要である。

5

複素数平面上に 3 点 A$(-1+5i)$，B$(2+3i)$，C$(3-2i)$ がある。

(1)　△ABC の重心を複素数で表すと ⑫ である。

(2)　∠ABC の大きさは ⑬ である。

(1)

$$\frac{-1+2+3}{3}+\frac{5+3-2}{3}i=\text{⑫}\boxed{\frac{4}{3}+2i}$$

(2)

$$\angle\text{ABC}=\arg\left(\frac{3-2i-(2+3i)}{-1+5i-(2+3i)}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{1-5i}{-3+2i}\right)$$

$$=\arg(-1+i)$$

ここで

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi+n\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+n\pi\right)\right)\ (n\text{ は整数})$$

であるから ∠ABC＝⑬$\boxed{\dfrac{3}{4}\pi}$

6

3つの状態A，B，Cがあり，その状態は下記の条件で確率的に変化する。

- 状態Aにあるとき，翌日には確率 $\frac{1}{6}$ で状態Bに移り，確率 $\frac{5}{6}$ で状態Aに留まる。
- 状態Bにあるとき，翌日には確率 $\frac{1}{3}$ で状態Aに移り，確率 $\frac{1}{3}$ で状態 Bに留まり，確率 $\frac{1}{3}$ で状態Cに移る。
- 状態Cにあるとき，翌日には確率 $\frac{1}{6}$ で状態Bに移り，確率 $\frac{5}{6}$ で状態Cに留まる。

第 n 日目に状態A，B，Cである確率をそれぞれ A_n，B_n，C_n で表すとする。

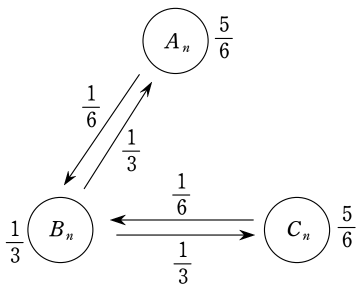
(1) 漸化式が $a_{n+1}=pa_n+qr^n$，$a_1=a$ と定義されているとき，両辺を r^{n+1} で割ることにより一般項を求めると $a_n=\boxed{⑭}$ となる。ただし，a，p，q、r は実数で $p\neq r$，$p\neq 0$，$q\neq 0$，$r\neq 0$ であり，n は自然数とする。

(2) B_{n+1} を $B_{n+1}=\alpha A_n+\beta B_n+\gamma C_n$ と表すと α，β，γ の値は $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\boxed{⑮}$ である。

(3) はじめ(第1日目)は確率1で状態Aにあるとする。このとき，$A_n=\boxed{⑯}$，$B_n=\boxed{⑰}$ である。また，十分に日数が経過したとき，状態Cである確率は $\boxed{⑱}$ である。

(1)
$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{p}{r}\frac{a_n}{r^n}+\frac{q}{r}$$
$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}-\frac{q}{r-p}=\frac{p}{r}\left(\frac{a_n}{r^n}-\frac{q}{r-p}\right)$$
と変形すれば
$$\frac{a_n}{r^n}=\left(\frac{a_1}{r^1}-\frac{q}{r-p}\right)\left(\frac{p}{r}\right)^{n-1}+\frac{q}{r-p}$$
$$a_n=r\left(\frac{a}{r}-\frac{q}{r-p}\right)p^{n-1}+\frac{q}{r-p}r^n$$
したがって
$$a_n=^{⑭}\boxed{\left(a-\frac{qr}{r-p}\right)p^{n-1}+\frac{q}{r-p}r^n}$$

(2) 遷移図より
$$B_{n+1}=\frac{1}{6}A_n+\frac{1}{3}B_n+\frac{1}{6}C_n$$
$$\therefore(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=^{⑮}\boxed{\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)}$$



(3)
$$B_{n+1}=\frac{1}{6}(A_n+C_n)+\frac{1}{3}B_n$$
で $A_n+B_n+C_n=1$ であることから
$$B_{n+1}=\frac{1}{6}(1-B_n)+\frac{1}{3}B_n$$
$$B_{n+1}=\frac{1}{6}B_n+\frac{1}{6}\quad(B_1=0)$$
変形して
$$B_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(B_n-\frac{1}{5}\right)$$
$$B_n=^{⑰}\boxed{-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}}$$

また
$$\begin{cases}A_{n+1}=\frac{5}{6}A_n+\frac{1}{3}B_n\\ C_{n+1}=\frac{5}{6}C_n+\frac{1}{3}B_n\end{cases}$$
の辺々を引くと
$$A_{n+1}-C_{n+1}=\frac{5}{6}(A_n-C_n)$$
であり，$A_1=1$，$C_1=0$ より
$$A_n-C_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
これと
$$A_n+C_n=1-B_n$$
の辺々をたして
$$2A_n=1-B_n+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
$$2A_n=1-\left\{-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}\right\}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
$$A_n=^{⑯}\boxed{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}}$$
以上より
$$\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{2}{5},\quad \lim_{n\to\infty}B_n=\frac{1}{5}$$
と求まることから
$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}\{1-(A_n+B_n)\}=1-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=^{⑱}\boxed{\frac{2}{5}}$$

⑯の別解

A_n は $A_{n+1}=\frac{5}{6}A_n+\frac{1}{3}B_n\ (A_1=1)$

をみたすから，先の一般項 B_n を代入して
$$A_{n+1}=\frac{5}{6}A_n-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{15}$$
となる。これを
$$A_{n+1}-x\left(\frac{1}{6}\right)^n-\alpha=\frac{5}{6}\left\{A_n-x\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}-\alpha\right\}$$
と変形できるような x，α を求めると
$$A_{n+1}=\frac{5}{6}A_n+\left(-\frac{5}{6}x+\frac{x}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\left(-\frac{5}{6}\alpha+\alpha\right)$$
より
$$-\frac{5}{6}x+\frac{x}{6}=-\frac{1}{15}\quad かつ\quad -\frac{5}{6}\alpha+\alpha=\frac{1}{15}$$
を解いて $x=\frac{1}{10}$，$\alpha=\frac{2}{5}$

したがって
$$A_{n+1}-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n-\frac{2}{5}=\frac{5}{6}\left\{A_n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}-\frac{2}{5}\right\}$$
と変形できるから
$$A_n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}-\frac{2}{5}=\left(A_1-\frac{1}{10}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
$$A_n=^{⑯}\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}}$$