1 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

原点を O とし，2 点 A$(\sqrt{3},\ -1)$ および B$(2\sqrt{3},\ 2)$ の位置ベクトルを $\vec{a}$ および $\vec{b}$ とする．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角を求めよ．

(2) $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ となる点を P とするとき，$|\vec{p}|$ が最小となるときの t の値と $|\vec{p}|$ の最小値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を t で表せ．

(4) t が (2) で求めた値になるとき，△OAB の面積は △OAP の何倍か．

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{3+1}=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{12+4}=4,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

より $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4}{2\cdot4}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$　…答

(2) $\vec{p}=(\sqrt{3},\ -1)+t(2\sqrt{3},\ 2)=(2\sqrt{3}\,t+\sqrt{3},\ 2t-1)$

より

$$\begin{aligned}|\vec{p}|&=\sqrt{(2\sqrt{3}\,t+\sqrt{3})^2+(2t-1)^2}\\&=\sqrt{16t^2+8t+4}\\&=\sqrt{16\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+3}\end{aligned}$$

であるから

$t=-\dfrac{1}{4}$ のとき $|\vec{p}|_{min}=\sqrt{3}$　…答

（別解1）

P は A を通り OB に平行な直線上に存在する。

これより $|\vec{p}|$ が最小となるのは OP⊥OB つまり $\vec{p}\cdot\vec{b}=0$ となるときが最小

$(2\sqrt{3}\,t+\sqrt{3},\ 2t-1)\cdot(2\sqrt{3},\ 2)=0$

$\Leftrightarrow$　$6(2t+1)+2(2t-1)=0$

$\Leftrightarrow$　$16t+4=0$　より　$t=-\dfrac{1}{4}$

（別解２）

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=|\vec{a}+t\vec{b}|^2\\&=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\&=4+8t+16t^2\\&=16\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+3\end{aligned}$$　としてもよい

（別解３）

(1)から (4) の図がすぐ得られるので $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を逆向きに $\dfrac{1}{4}$ 倍したものであることがわかる。

(3)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})\\&=|\vec{p}|^2-\vec{p}\cdot\vec{a}\\&=(16t^2+8t+4)-\{3(2t+1)-(2t-1)\}\\&=16t^2+4t\end{aligned}$$　…答

(4) (2) より次の図を得る。

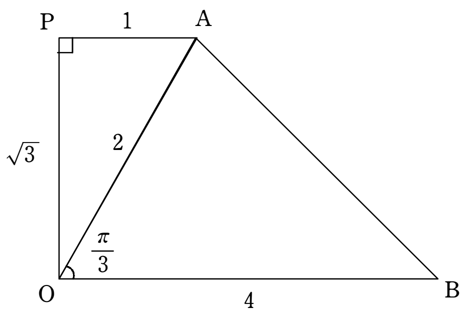
$$\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{OAP}\text{ の面積}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって 4 倍　…答

（別解）

面積比は AP : OB＝1 : 4



2 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を満たす複素数 z のうち，実数部分が最大であるものを求めよ．ただし i は虚数単位とする．

(2) (1) で求めた解を z_1 とするとき，$z_1{}^p=(1-i)^q$ となる正の整数 p，q がそれぞれ最小となる p，q の値を求めよ．

(1) 方程式の解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$z^4=-8+8\sqrt{3}\,i \iff r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

したがって，

$$r^4=16,\quad 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi\ (n\text{ は整数})$$

$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ より，

$$\begin{cases}r=2\\4\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{14}{3}\pi,\ \frac{20}{3}\pi\end{cases}\iff\begin{cases}r=2\\\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\end{cases}$$

z の実数部分が最大となるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときであるから，求める複素数は，

$z=\sqrt{3}+i$　…答

別解

方程式の右辺を極形式で表すと，

$$z^4=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\quad\cdots①$$

よって，解の 1 つは $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$ であり，この値を α とおくと，

$$① \iff z^4=\alpha^4 \iff \left(\frac{z}{\alpha}\right)^4=1$$

$\dfrac{z}{\alpha}$ は 1 の 4 乗根であるから，

$$\frac{z}{\alpha}=\pm1,\ \pm i \iff z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(-1+\sqrt{3}\,i)$$

この中で，実数部分が最大であるものは，

$z=\sqrt{3}+i$　…答

(2) $z_1{}^p=(1-i)^q \iff (\sqrt{3}+i)^p=(1-i)^q$　…② となるための必要条件は，両辺の絶対値が等しくなることであるから，

$$|\sqrt{3}+i|^p=|1-i|^q \iff 2^p=2^{\frac{q}{2}} \iff q=2p\quad\cdots③$$

このとき，

$$\begin{aligned}② &\iff (\sqrt{3}+i)^p=(1-i)^{2p} \iff (\sqrt{3}+i)^p=(-2i)^p\\&\iff \left(\frac{\sqrt{3}+i}{-2i}\right)^p=1 \iff \left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^p=1\quad\cdots④\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$，$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=1$ より，④ を満たす正の整数 p の最小値は $p=3$ であり，③ より $q=6$

したがって，

$(p,\ q)=(3,\ 6)$　…答

YMS 2018年度 解答速報

昭和大学医学部 Ⅰ期 数学

3 次の各問に答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) 2018^{2018} の下 2 桁を求めよ．

(2) $\left(3x^3+\dfrac{1}{x}\right)^9$ の展開式における $\dfrac{1}{x}$ の係数を求めよ．

(3) $\log_3 x+\log_3 y=2$ のとき，$3x+y$ の最小値を求めよ．

(4) 次のデータの四分位偏差を求めよ．

49，81，67，23，57，31，73，92，37，35，60

(5) 青，赤，白，黒の球がそれぞれ 4 個ずつ袋の中に入っている．この袋の中から 4 個の球を取り出すとき，次の問いに答えよ．

(5−1) ちょうど 2 種類の色の球が取り出される確率を求めよ．

(5−2) 取り出される球の色の種類の数の期待値（平均値）を求めよ．

(1) 100 を法として合同式で考える．

$$2018^2\equiv18^2\equiv324\equiv24$$

$$24^2\equiv476\equiv76\equiv-24$$

以下，周期性があり，

$$2018^{4n}\equiv-24,\ 2018^{4n-2}\equiv24$$

となる．

$$2018=4\times504+2$$

であるから，下 2 桁は 24 …答

(2) $\left(3x^3+\dfrac{1}{x}\right)^9$ の展開式の一般項は，

$${}_9C_k\cdot(3x^3)^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k={}_9C_k\cdot3^{9-k}\cdot x^{27-4k}$$

となる．$\dfrac{1}{x}$ の係数は，その x の次数から，

$$27-4k=-1 \iff k=7$$

このとき，

$${}_9C_7\cdot3^2=324 \quad \cdots答$$

(3) 真数条件より，$x>0$，$y>0$ であり，このとき

$$\log_3 x+\log_3 y=2 \iff \log_3 xy=\log_3 9 \iff xy=9$$

$3x>0$，$y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$3x+y\geqq2\sqrt{3x\cdot y}=6\sqrt{3}$$

また，等号が成り立つのは，$3x=y$ すなわち $x=\sqrt{3}$，$y=3\sqrt{3}$ のときである．

したがって，最小値は，$6\sqrt{3}$ …答

(4) データを小さいものから順に並べると，

23，31，35，37，49，57，60，67，73，81，92

であり，第 1 四分位数は 35，第 3 四分位数は 73 である．したがって，四分位範囲は $73-35=38$．四分位偏差は $38\div2=19$ …答

(5)

(5−1)

4 種類の色から 2 種類を選ぶと ${}_4C_2$ 通りである．この色を仮に A，B とするとき，A，B が出る個数を考えると，(1 個，3 個)，(2 個，2 個)，(3 個，1 個) の場合がある．それぞれの球の取り出す場合を考えると，${}_4C_1\cdot{}_4C_3+{}_4C_2\cdot{}_4C_2+{}_4C_3\cdot{}_4C_1$ 通りである．

したがって，

$$\frac{{}_4C_2({}_4C_1\cdot{}_4C_3+{}_4C_2\cdot{}_4C_2+{}_4C_3\cdot{}_4C_1)}{{}_{16}C_4}=\frac{102}{455} \quad \cdots答$$

(5−2)

(5−1) と同様に，取り出される色の種類の数で場合分けして考える．

(ⅰ) 球の色が 1 種類のとき

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_4C_4}{{}_{16}C_4}=\frac{1}{455}$$

(ⅱ) 球の色が 4 種類のとき

$$\frac{{}_4C_4\cdot({}_4C_1)^4}{{}_{16}C_4}=\frac{64}{455}$$

(ⅲ) 球の色が 3 種類のとき

余事象の確率を考えると，

$$1-\left(\frac{1}{455}+\frac{102}{455}+\frac{64}{455}\right)=\frac{288}{455}$$

したがって，期待値を考えると，

$$1\cdot\frac{1}{455}+2\cdot\frac{102}{455}+3\cdot\frac{288}{455}+4\cdot\frac{64}{455}=\frac{265}{91} \quad \cdots答$$

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+k}\right)^2$

の値を求めよ．

(2) y 軸上の点 P$(0,\ t)$ から双曲線 $x^2-y^2=1$ へ 2 本の接線を引き，接点を A，B とする．△PAB の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ の最小値を求めよ．ただし $t\neq0$ とする．

(3) 媒介変数 $t\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{3}\right)$ によって，$x=3\cos2t$，$y=2\sin3t$ と表される曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+k}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\quad\cdots\text{答}$$

(2) 対称性から $t>0$ としてよい。双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線は

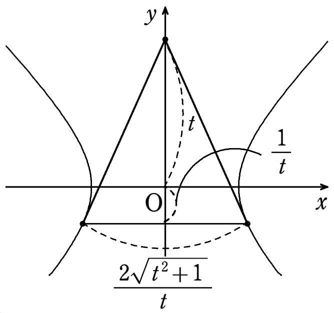
$$x_0x-y_0y=1$$

これが $(0,\ t)$ を通るとき

$$-y_0t=1\qquad\therefore\ y_0=-\frac{1}{t}$$

これを $x_0{}^2-y_0{}^2=1$ に代入すると

$$x_0{}^2-\left(-\frac{1}{t}\right)^2=1\qquad\therefore\ x_0=\pm\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$$



よって

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right)\left\{t-\left(-\frac{1}{t}\right)\right\}$$
$$=\frac{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}{t^2}=\sqrt{\frac{(t^2+1)^3}{t^4}}$$
$$=\sqrt{\frac{(X+1)^3}{X^2}}=\sqrt{f(X)}\ (\ X=t^2>0\ \text{とした})$$

とおくと

$$f'(X)=\frac{3(X+1)^2\cdot X^2-(X+1)^3\cdot 2X}{X^4}=\frac{(X+1)^2(X-2)}{X^3}$$

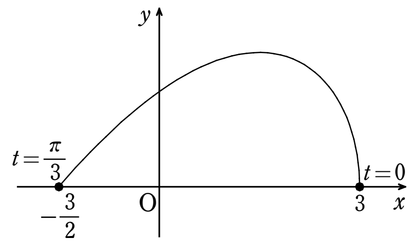
増減表は下図となるから，最小値は $\sqrt{f(2)}=\sqrt{\frac{3^3}{2^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\text{答}$

X	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(X)$		$-$	0	$+$
$f(X)$		↘	最小	↗

(3) $x=3\cos2t$ は $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{3}$ で単調減少，

$y=2\sin3t$ は $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{6}$ で単調増加，

$\frac{\pi}{6}\leqq t\leqq\frac{\pi}{3}$ で単調減少だから右図を得る。



よって，求める面積は

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{3}ydx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}y\frac{dx}{dt}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}2\sin3t\cdot(-6\sin2t)dt$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin3t\sin2t\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[-\frac{1}{2}\{\cos(3t+2t)-\cos(3t-2t)\}\right]dt$$
$$=-6\left[\frac{1}{5}\sin5t-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-6\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$
$$=\frac{18\sqrt{3}}{5}\quad\cdots\text{答}$$

講評

出題内容は以下の通り．

$\boxed{1}$ **ベクトル**

$\boxed{2}$ **複素数**

$\boxed{3}$ **小問集合**
- (1) 整数問題 (余りの問題)
- (2) 2 項定理
- (3) 対数関数
- (4) データの分析
- (5) 確率・期待値 (数 B)

$\boxed{4}$ **小問集合**
- (1) 区分求積法
- (2) 2 次曲線 (双曲線)
- (3) パラメタ曲線 (リサージュ曲線)

昨年に比べて易化し，分量も少なくなった．また，注目するべき点として，
・昨年に引き続き数 B の確率（期待値）に関する出題があった．
・解答欄に答えを記入する問題のみで記述式の問題は出題されなかった．
ことがあげられる．合格ラインは 80 分ほど時間をかけられるとして，75 % 程度．