1

$a<0$，$b\neq c$ とし，$f(x)=-x^2+ax+1$，$g(x)=ax^3-2ax^2+ax-3$ とする．
2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=b$ で交わり，$x=c$ で接しているとする．
(1)　定数 a，b，c の値を求めよ．
(2)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$x=c$ で接するとき

$$\begin{cases} f(c)=g(c) \\ f'(c)=g'(c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -c^2+ac+1=ac^3-2ac^2+ac-3 \\ -2c+a=3ac^2-4ac+a \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac^3-2ac^2+c^2-4=0 & \cdots① \\ 3ac^2-4ac+2c=0 & \cdots② \end{cases}$$

②より

$$c(3ac-4a+2c)=0$$

$c=0$ とすると ①が成り立たないから

$$3ac-4a+2c=0 \quad より \quad a=\frac{2}{4-3c}\left(c\neq\frac{4}{3}\right)$$

①へ代入すると

$$\frac{2}{4-3c}c^3-2\frac{2}{4-3c}c^2+c^2-4=0$$

整理して

$$c^3-12c+16=0 \quad より \quad (c-2)^2(c+4)=0$$

$a<0$ となるのは $c=2$ のときで，$a=\dfrac{2}{4-6}=-1$

また，

$$f(b)=g(b)$$
$$-b^2+ab+1=ab^3-2ab^2+ab-3$$

$a=-1$ として

$$-b^2-b+1=-b^3+2b^2-b-3$$
$$b^3-3b^2+4=0$$
$$(b+1)(b-2)^2=0$$

$b\neq c$ より $b=-1$

以上より　$(a,\ b,\ c)=(-1,\ -1,\ 2)$　…答

【別解①】

$f(x)=g(x)$ は

$$-x^2+ax+1=ax^3-2ax^2+ax-3$$
$$ax^3-(2a-1)x^2-4=0 \quad \cdots③$$

$x=2$ が解として見つかるから

$$(x-2)(ax^2+x+2)=0$$

これが重解をもてばよい

$$h(x)=ax^2+x+2$$

として

$h(x)=0$ の判別式 $D=1-8a=0$（$a<0$ に反する）

$h(2)=4a+4=0$　より $a=-1$（$a<0$ をみたす）

これより

$$(x-2)(-x^2+x+2)=0,\quad (x-2)^2(x+1)=0$$

より　　$c=2$，$b=-1$

【別解②】

③について

$$ax^3-(2a-1)x^2-4=a(x-b)(x-c)^2$$

と因数分解できることを利用する。展開して

$$ax^3-(2a-1)x^2-4=ax^3+a(-b-2c)x^2+a(2bc+c^2)xa-abc^2$$

x の係数に注目して

$$a(2bc+c^2)=0 \quad より \quad ac(2b+c)=0$$

$a\neq 0$，$c\neq 0$ より $c=-2b$　…④

x^2，定数項に注目して

$$\begin{cases} -(2a-1)=a(-b-2c) \\ -4=-abc^2 \end{cases} より \begin{cases} -2a+1=a(3b) \\ 4=4ab^3 \end{cases}$$

上式から　$b=\dfrac{-2a+1}{3a}$

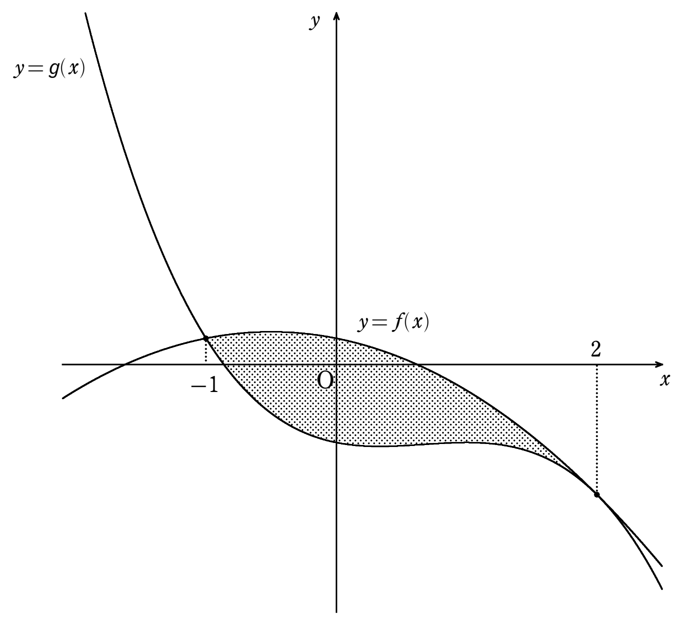
下式へ　$1=a\left(\dfrac{-2a+1}{3a}\right)^3$　より　$9a^2=(-2a+1)^3$

整理して　$8a^3+15a^2+6a-1=0$

$$(a+1)(8a^2+7a-1)=0$$
$$(a+1)^2(8a-1)=0$$

$a<0$ となるのは　$a=-1$　　これより b，c が求まる。

(2)



図の打点部の面積を求めればよい

$$\int_{-1}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2dx$$

$$=\left[(x+1)\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-1}^{2}-\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}(x-2)^3dx$$

$$=0-\left[\frac{1}{12}(x-2)^4\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{12}(-1-2)^4=\frac{27}{4} \quad \cdots答$$

2

点 $(2,\ 3)$ を中心とする半径 1 の円上の動点を A とする．B$(-3,\ 4)$ として，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ が最大となるときの点 A の座標を求めよ．

点 $(2,\ 3)$ を C とすると，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

さらに，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ として，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6+|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$|\overrightarrow{CA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=5$ で定数となるから，この値が最大となるのは $\theta=0°$ のときである．

つまり，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{OB}$ が同じ向きになるときであり，このとき $\overrightarrow{CA}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ となる．

したがって，

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}=(2,\ 3)+\frac{1}{5}(-3,\ 4)=\left(\frac{7}{5},\ \frac{19}{5}\right)$$

点 A の座標は $\left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{19}{5}\right)$　…答

【別解】

点 A の座標は $(2+\cos t,\ 3+\sin t)$（t は実数）と表せるから，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2+\cos t)\cdot(-3)+(3+\sin t)\cdot 4$$
$$=4\sin t-3\cos t+6$$
$$=5\sin(t-\alpha)+6$$

ただし α は，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ を満たす鋭角である．

$t-\alpha$ も実数全体を動くから，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ が最大となるとき，

$$t-\alpha=\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad（n は整数）$$

このとき，

$$\cos t=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

$$\sin t=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

したがって，点 A の座標 $(2+\cos t,\ 3+\sin t)$ は $\left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{19}{5}\right)$　…答

講評

1　2 次関数と 3 次関数のグラフで囲まれる部分の面積
(1) は問題文の条件から容易に因数分解がわかる他，様々な解法が考えられる．
(2) はよくある面積の問題．積分計算の得手，不得手で差がややつきそうではある．
難易度は標準．

2　内積の最大値に関する問題
点 A をパラメータ θ を用いて表せば，内積が θ の関数となる．
ベクトルの扱いに慣れていれば，より簡単に求めることも可能ではある．

3

$\mathrm{OA}_0=a_0$，$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1=a_1$，$\angle \mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ の面積を T_1 とおく。また，三角形 $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ と相似な直角三角形 $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$ を，OA_1 を一辺とし，A_2 が $\angle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{OA}_1=\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_0$ となるよう，三角形 $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ と反対側にとり，三角形 $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$ の面積を T_2 とおく。

以下，n を2以上の自然数とする。三角形 $\mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似な直角三角形 $\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ を，OA_{n-1} を一辺とし，A_n が $\angle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n-1}=\angle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{OA}_{n-2}$ となるよう，三角形 $\mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と反対側にとり，三角形 $\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の面積を T_n とおく。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(n)=T_1+T_2+\cdots\cdots+T_n$ とするとき，$f(n)$ を求めよ。

(2) $a_0=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a_1$ のとき，(1) で定義された $f(n)$ に対して，$f(m)\geqq 100f(1)$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。ただし，必要ならば，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}5=0.6990$ を用いてよい。

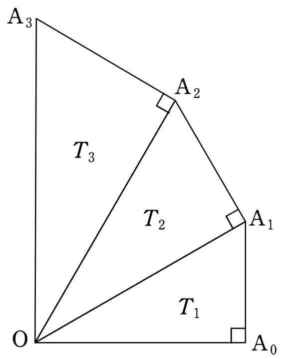
(1) $T_1=\dfrac{1}{2}a_0a_1$

また，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ と $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の相似比は，

$\mathrm{OA}_0:\mathrm{OA}_1=a_0:\sqrt{{a_0}^2+{a_1}^2}$ なので，

$$T_{n+1}=\left(\frac{\mathrm{OA}_1}{\mathrm{OA}_0}\right)^2T_n=\left(1+\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)T_n$$

したがって，数列 $\{T_n\}$ は公比 $1+\dfrac{{a_1}^2}{{a_0}^2}$ (>1) の等比数列であるから，



$$f(n)=T_1\cdot\frac{\left(1+\dfrac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)^n-1}{\left(1+\dfrac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)-1}=\frac{{a_0}^3}{2a_1}\left\{\left(1+\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)^n-1\right\}\quad\cdots\text{答}$$

(2) $$f(m)\geqq 100f(1)\iff\left(1+\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)^m-1\geqq 100\left\{\left(1+\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)^1-1\right\}\quad\cdots①$$

$a_0=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a_1$ より，$\dfrac{{a_1}^2}{{a_0}^2}=\dfrac{4}{5}$ であるから，

$$①\iff\left(\frac{9}{5}\right)^m-1\geqq 100\cdot\frac{4}{5}\iff\left(\frac{9}{5}\right)^m\geqq 81\iff 3^{2m-4}\geqq 5^m$$

両辺の常用対数をとると，

$$(2m-4)\log_{10}3\geqq m\log_{10}5\iff m\geqq\frac{9542}{1276}=7.47\cdots$$

したがって，条件を満たす自然数 m の最小値は $m=8$ …答

4

方程式 $nx^2+3x-9=0$ が整数解を持つための正の整数 n をすべて求めよ．

$$nx^2+3x-9=0\quad\cdots①$$

方程式 ① の持つ整数解を α とおくと，

$$n\alpha^2+3\alpha-9=0$$
$$\alpha(n\alpha+3)=9$$

α，$n\alpha+3$ はともに整数であるから，α は9の約数である．

(ⅰ) $\alpha=1$ のとき

① に $x=1$ を代入すると，

$$n+3-9=0,\quad n=6$$

(ⅱ) $\alpha=3$ のとき

① に $x=3$ を代入すると，

$$9n+9-9=0,\quad n=0$$

(ⅲ) $\alpha=9$ のとき

① に $x=9$ を代入すると，

$$81n+27-9=0,\quad n=-\frac{2}{9}$$

(ⅳ) $\alpha=-1$ のとき

① に $x=-1$ を代入すると，

$$n-3-9=0,\quad n=12$$

(ⅴ) $\alpha=-3$ のとき

① に $x=-3$ を代入すると，

$$9n-9-9=0,\quad n=2$$

(ⅵ) $\alpha=-9$ のとき

① に $x=-9$ を代入すると，

$$81n-27-9=0,\quad n=\frac{4}{9}$$

したがって，(ⅰ)～(ⅵ) より，正の整数 n は 2，6，12 …答

【別解①】

$$nx^2+3x-9=0\quad\cdots①$$

解の公式より，① の解は

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{D}}{2n}\quad(D=3^2-4\cdot n\cdot(-9)\text{ である})$$

となる．ここで，① が整数解を持つとき，この解は有理数となる．すなわち，D が平方数となることが必要である．ここで，$D=k^2$ (k は0以上の整数) とおく．

$$D=3^2-4\cdot n\cdot(-9)=k^2$$
$$k^2=9(4n+1)\quad\cdots②$$

k，n が整数であるから，k は3の倍数である．$k=3m$ (m は0以上の整数) とおくと ② を用いて，

$$m^2=4n+1\quad\cdots③$$

m，n が整数であるから，右辺が奇数になるので，左辺も奇数である．したがって，$m=2l-1$ (l は自然数) とおくことができる．③ を用いて，

$$(2l-1)^2=4n+1$$
$$4l^2-4l+1=4n+1$$
$$l(l-1)=n$$

n が正の整数であることから，l は2以上の整数である．これを ① に代入すると

$$l(l-1)x^2+3x-9=0$$
$$(lx-3)\{(l-1)x+3\}=0$$
$$x=\frac{3}{l},\quad -\frac{3}{l-1}$$

この2つの解のいずれかが整数となればよい．

すなわち，l が3の約数となるか，$l-1$ が3の約数となるので，$l\geqq 2$ に注意して，

$$l=3\quad\text{または}\quad l-1=1,\ 3$$
$$l=2,\ 3,\ 4$$

このとき，$n=l(l-1)$ なので，$n=2$，6，12 …答

【別解②】

$$nx^2+3x-9=0\quad\cdots①$$

方程式 ① の持つ整数解を α とおくと，

$$n\alpha^2+3\alpha-9=0$$
$$n\alpha^2=-3\alpha+9$$

$\alpha=0$ は解ではないので，両辺を $\alpha^2(\neq 0)$ で割ると，

$$n=\frac{-3\alpha+9}{\alpha^2}\quad\cdots④$$

n は正の整数なので，$n\geqq 1$ である．

$$n=\frac{-3\alpha+9}{\alpha^2}\geqq 1$$
$$\alpha^2+3\alpha-9\leqq 0$$

これを満たす整数 α は $\alpha=-4$，-3，-2，-1，0，1 である．$\alpha\neq 0$ に注意して n を求める．

(ⅰ) $\alpha=-4$ のとき ④ より $n=\dfrac{21}{16}$

(ⅱ) $\alpha=-3$ のとき ④ より $n=2$

(ⅲ) $\alpha=-2$ のとき ④ より $n=\dfrac{15}{4}$

(ⅳ) $\alpha=-1$ のとき ④ より $n=12$

(ⅴ) $\alpha=1$ のとき ④ より $n=6$

したがって，$n=2$，6，12 …答

講評

3　等比数列の和・常用対数

(1) は相似な図形の辺の長さや面積が等比数列をなすことを利用する典型問題.
(2) は常用対数を用いる典型問題.
難易度は標準.

4　整数問題

本学では毎年必ず出ている整数問題.
x の2次方程式の2解がともに整数となるとは限らないことに注意.
難易度はやや難.

65 %～70 % が合格ラインの目安となるだろう.