[I]

x の3次方程式 $x^3+6x^2-px-q=0$ (ただし p, q は実数の定数) が相異なる3つの実数解をもち，それらを適当に並べると等比数列になるという。1つの解が4であるとき，他の2つの解と p, q の値を求めよ。解答欄には答えのみを記入せよ。

【解答】

他の解を α, β とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+4=-6 & \cdots①\\ \alpha\beta+4\alpha+4\beta=-p & \cdots②\\ 4\alpha\beta=q & \cdots③\end{cases}$$

(i) 4が中項でないとき　$\alpha=4r$, $\beta=4r^2$ とおくと

①より　$4r+4r^2+10=0$ これは r が虚数となるため不適

(ii) 4が中項であるとき　$\alpha=4r$, $\beta=\dfrac{4}{r}$ とおくと

①より　$4r+\dfrac{r}{4}+4=-6$　整理して　$(2r+1)(r+2)=0$　より　$r=-\dfrac{1}{2}$, -2

②より　$16+16r+\dfrac{16}{r}=-p$　いずれの r においても　$p=24$

③より　$4\cdot4r\cdot\dfrac{4}{r}=q$　より　$q=64$

以上より　他の2つの解は -8, -2　および　$p=24$, $q=64$

[II]

1から6までの番号をつけた6枚のカードから同時に3枚を取り出す．引いたカードに書かれている数字を a, b, c とする．O を原点とする xy 平面において3点 (a, a^2), (b, b^2), (c, c^2) を頂点とする三角形の面積を S とするとき，以下の各問いの答えのみを解答欄に記せ．

問1　S を a, b, c を用いて表せ．
問2　S の最大値と最小値を求めよ．
問3　S が偶数となる確率を求めよ．

【解答】

問1　$\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$, $\mathrm{C}(c, c^2)$ とおく．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}b-a\\ b^2-a^2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}c-a\\ c^2-a^2\end{pmatrix}$$

であるから，面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left|(b-a)(c^2-a^2)-(b^2-a^2)(c-a)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(b-a)(c-a)\{(c+a)-(b+a)\}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

問2　$a<b<c$ としても一般性を失わない．$2\leqq c-a\leqq5$ である．

(ア)　S が最大となるとき

$c-a=5$ のときを考えればよく，このとき，$b-a=t$ とおくと，$c-b=5-t$ である．

$$S=\frac{1}{2}\left|(5-t)\cdot t\cdot 5\right|$$
$$=\frac{5}{2}\left|\frac{25}{4}-\left(t-\frac{5}{2}\right)^2\right|$$

$t=1$, 2, 3, 4 のときを考えればよく，$t=2$, 3 のとき，S は最大値15となる．

(イ)　S が最小となるとき

$c-a=2$ のときを考えればよく，このとき，$c-b=b-a=1$ である．

このとき，S の最小値は1である．

問3　(a, b, c) の偶奇で場合分けして考える．

(ア)　偶数が3枚出たとき

$a-b$, $b-c$, $c-a$ はすべて偶数であるから S は偶数である．

$\{a, b, c\}=\{2, 4, 6\}$

(イ)　偶数が2枚，奇数が1枚出たとき

$a-b$, $b-c$, $c-a$ は偶数が1つ，奇数が2つであるから，S が偶数になるとき，

$\{a, b, c\}=\{2, 6, 奇数\}$

(ウ)　偶数が1枚，奇数が2枚出たとき

$a-b$, $b-c$, $c-a$ は偶数が1つ，奇数が2つであるから，S が偶数になるとき，

$\{a, b, c\}=\{1, 5, 偶数\}$

(エ)　奇数が3枚出たとき

$a-b$, $b-c$, $c-a$ はすべて偶数であるから S は偶数である．

$\{a, b, c\}=\{1, 3, 5\}$

したがって，(ア)〜(エ) より，(a, b, c) の組合せは8通りであり，求める確率は，

$$\frac{8}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

[Ⅲ]

的中！

次の等式を満たす $x>-1$ において定義された微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x)=\log(x+1)+\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt$$

【解答】

$$f(x)=\log(x+1)+\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt \quad \cdots(*)$$

$x-t=s$ とおくと，$dt=-ds$

t	$0 \longrightarrow x$
s	$x \longrightarrow 0$

$$\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt=\int_x^0 f(s)\sin(x-s)(-ds)$$

$$=\int_0^x f(s)\{\sin x\cos s-\cos x\sin s\}ds$$

$$=\sin x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds-\cos x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds$$

したがって，(*) より

$$f(x)=\log(x+1)+\sin x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds-\cos x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds \quad \cdots①$$

① を x で微分すると，

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds+\sin x\cdot f(x)\cos x$$

$$+\sin x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds-\cos x\cdot f(x)\sin x$$

$$=\frac{1}{x+1}+\cos x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds+\sin x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds \quad \cdots②$$

さらに ② を x で微分すると，

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds+\cos x\cdot f(x)\cos x$$

$$+\cos x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds+\sin x\cdot f(x)\sin x$$

$$=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds+f(x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$+\cos x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds$$

$$=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\cdot\int_0^x f(s)\cos s\,ds+\cos x\cdot\int_0^x f(s)\sin s\,ds+f(x) \quad \cdots③$$

ここで，①，③ を辺々加えると，

$$f(x)+f''(x)=\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}+f(x)$$

$$f''(x)=\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2} \quad \cdots④$$

さらに，①，② に $x=0$ を代入すると，

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1 \quad \cdots⑤$$

④ より，

$$f'(x)=\int f''(x)dx$$

$$=\int\left\{\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$$

$$=(x+1)\log(x+1)-(x+1)+\frac{1}{x+1}+C_1$$

⑤ より，

$$f'(0)=C_1=1$$

よって，

$$f'(x)=(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}$$

これを x で積分すると，

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int\left\{(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}x^2+\log(x+1)+C_2$$

⑤ より，

$$f(0)=-\frac{1}{4}+C_2=0$$

よって，

$$C_2=\frac{1}{4}$$

であり，

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)+\log(x+1)-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x$$

となる．

（注） $f(x)$ は 2 回微分可能と解釈した．

YMS 数学 後期テキストより的中が出ました!!

YMS 数学（後期）テキスト⑤92 ページより抜粋

8－2B

(1)　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x)=\cos 2x+\int_0^\pi f(\pi-t)|\cos t|dt$$

(2)　次の等式を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．

$$g(x)=(x^2+1)e^{-x}+\int_0^x g(x-t)e^{-t}dt$$

[IV]

複素数 z $(z \neq 0,\ 2)$ に対して

$$w = \frac{1}{|z|^2 - 2z}$$

とおく。複素数 w が純虚数であるときに z が動く複素数平面上の図形を C として，以下の各問いに答えよ。

問1　図形 C を複素数平面上に図示せよ。

問2　C 上の z に対して，複素平面上の3点 $\frac{5}{6}$，z，z^2 を頂点とする三角形の面積を $S(z)$ とする。このとき，$S(z)$ の最大値と，最大値を与える z の値をそれぞれ求めよ。

【解答】

問1　w が純虚数である条件は

$$Re(w) = \frac{w+\overline{w}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|z|^2-2z} + \frac{1}{|z|^2-2\overline{z}}\right) = 0$$

両辺 $(|z|^2-2z)(|z|^2-2\overline{z})$ をかけると

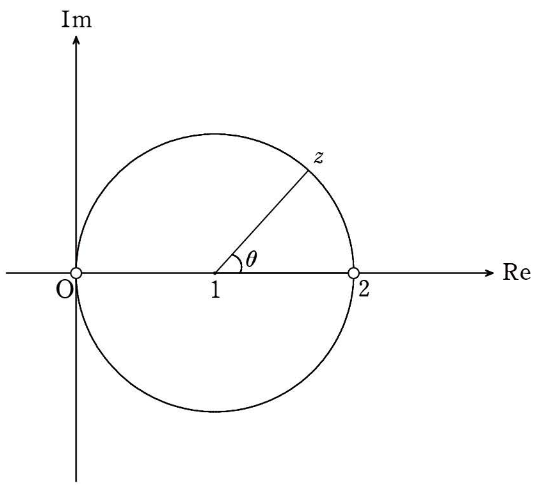
$$\overline{z}(z-2) + z(\overline{z}-2) = 0$$

整理して

$$(z-1)(\overline{z}-1) = 1$$

$$|z-1| = 1$$

以上より，求める図形 C は点1を中心とする円から 点0，2を除いたものである。



問2　問1の図において

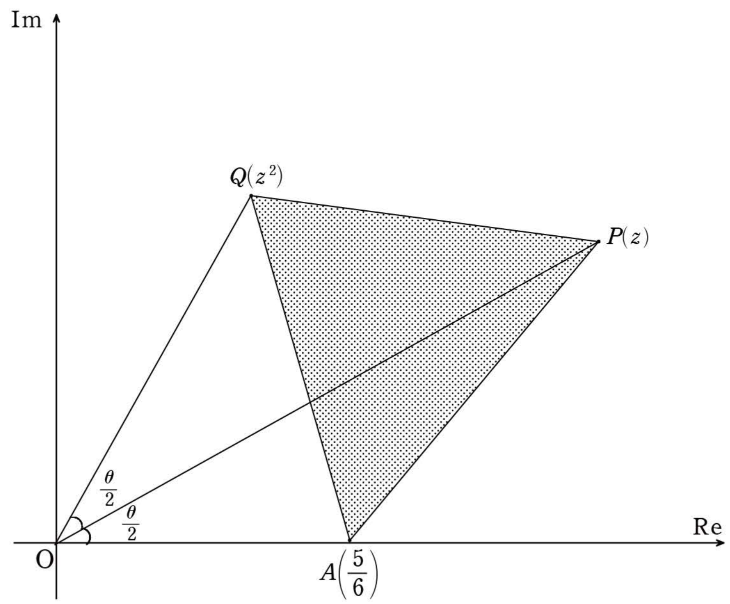
$$z = (1+\cos\theta) + i\sin\theta$$

とおく。（対称性より $0<\theta<\pi$ としてよい）

$$z = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

より，題意の三角形は図のようになる。



したがって

$$S(z) = \triangle OAP + \triangle OPQ - \triangle OAQ$$

$$= \frac{1}{2}\frac{5}{6}2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}2\cos\frac{\theta}{2}4\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\frac{5}{6}4\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{5}{3} + 8\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{20}{3}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\theta\left(\frac{4}{3}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{5}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\sin\theta(2\cos\theta + 7)$$

これを $f(\theta)$ とおくと

$$f'(\theta) = \frac{1}{12}(4\cos^2\theta + 7\cos\theta - 2) = \frac{1}{12}(4\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2)$$

より，$\cos\theta_0 = \frac{1}{4}$，$\sin\theta_0 = \frac{\sqrt{15}}{4}$ をみたす θ_0 で極大かつ最大となる。

以上より

S の最大値は $f(\theta_0) = \frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\left(2\cdot\frac{1}{4} + 7\right) = \frac{5\sqrt{15}}{32}$

そのときの z は対称性を考えて

$$z = 1 + \cos\theta_0 \pm i\sin\theta_0 = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i$$

的中！

[V]

C は 2 点 A，B を焦点とする楕円とし，$AB=2\sqrt{3}$，C の長軸の長さが 4 であるとする．C 上の点で長軸上にない点を P とする．直線 PA が P と異なる点で C と交わる点を Q と し，直線 PB が P と異なる点で C と交わる点を R とする．また線分 AR と線分 BQ の交 点を S とする．$\vec{a}=\overrightarrow{PA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{PB}$ とし，$l=|\vec{a}|$ とおくとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　l の値の範囲を求めよ (答えのみでよい).

問 2　$\overrightarrow{PQ}=(1+s)\vec{a}$，$\overrightarrow{PR}=(1+t)\vec{b}$ を満たす実数 s，t を，l を用いて表せ．

問 3　$\overrightarrow{PS}=u\vec{a}+v\vec{b}$ を満たす実数 u，v を，l を用いて表せ．

問 4　三角形 SAB の面積を T_1，三角形 SQR の面積を T_2 とする．$8T_1=3T_2$ を満たす l の値を求めよ．

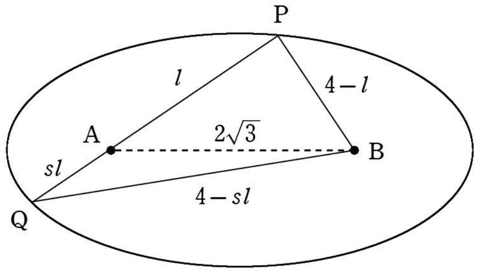
問 1　焦点 A から長軸の両端までの距離は，

小さい方が $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$，大きい方が $(2-\sqrt{3})+2\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ である．

点 P が長軸上にないことにも注意して，

$$2-\sqrt{3}<l<2+\sqrt{3} \quad \cdots 答$$

問 2



$PA+PB=4$，$PA=l$ より，$PB=4-l$

$\overrightarrow{PQ}=(1+s)\vec{a} \iff \overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=s\vec{a} \iff \overrightarrow{AQ}=s\vec{a}$ より，$QA=sl$

これと，$QA+QB=4$ より，$QB=4-sl$

△ABP に余弦定理を用いて，

$$\cos\angle BAP=\frac{(2\sqrt{3})^2+l^2-(4-l)^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\,l}=\frac{2l-1}{\sqrt{3}\,l} \quad \cdots ①$$

次に，△ABQ に余弦定理を用いる．これは ① において l を sl に置き換えればよく

$$\cos\angle BAQ=\frac{2sl-1}{\sqrt{3}\,sl}$$

$\angle BAP+\angle BAQ=\pi$ であるから，$\cos\angle BAP+\cos\angle BAQ=0$ であり，

$$\frac{2l-1}{\sqrt{3}\,l}+\frac{2sl-1}{\sqrt{3}\,sl}=0 \iff 2l-1+\frac{2sl-1}{s}=0 \iff 4l-1-\frac{1}{s}=0$$

したがって，

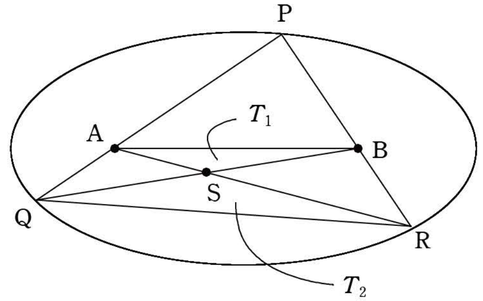
$$s=\frac{1}{4l-1} \quad \cdots 答$$

$PB=4-l$，$\overrightarrow{PR}=(1+t)\vec{b} \iff \overrightarrow{BR}=t\vec{b}$ より，

$s=\dfrac{1}{4l-1}$ の s，l をそれぞれ t，$4-l$ に置き換えて，

$$t=\frac{1}{4(4-l)-1}=\frac{1}{15-4l} \quad \cdots 答$$

問 3



$PA:AQ=1:s=(4l-1):1$ かつ $PB:BQ=1:t=(15-4l):1$

メネラウスの定理より，

$$\frac{PQ}{QA}\cdot\frac{AS}{SR}\cdot\frac{RB}{BP}=1 \iff \frac{4l}{1}\cdot\frac{AS}{SR}\cdot\frac{1}{15-4l}=1 \iff \frac{AS}{SR}=\frac{15-4l}{4l}$$

したがって，

$$\overrightarrow{PS}=\frac{4l\overrightarrow{PA}+(15-4l)\overrightarrow{PR}}{(15-4l)+4l}=\frac{4l}{15}\vec{a}+\frac{15-4l}{15}\cdot\frac{16-4l}{15-4l}\vec{b}$$

$$=\frac{4l}{15}\vec{a}+\frac{16-4l}{15}\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，$\overrightarrow{PS}=u\vec{a}+v\vec{b}$ を満たす実数 u，v は，

$$u=\frac{4l}{15},\quad v=\frac{16-4l}{15} \quad \cdots 答$$

問 4　メネラウスの定理より，

$$\frac{PR}{RB}\cdot\frac{BS}{SQ}\cdot\frac{QA}{AP}=1 \iff \frac{16-4l}{1}\cdot\frac{BS}{SQ}\cdot\frac{1}{4l-1}=1 \iff \frac{BS}{SQ}=\frac{4l-1}{16-4l}$$

したがって，

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{SA\cdot SB}{SQ\cdot SR}=\frac{(15-4l)(4l-1)}{(16-4l)\cdot 4l}=\frac{-15+64l-16l^2}{16(4l-l^2)}$$

求める条件は，

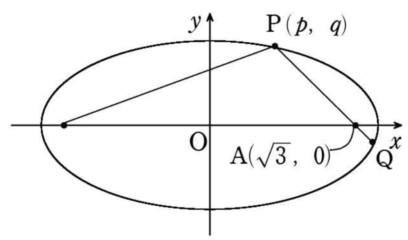
$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{8} \iff \frac{-15+64l-16l^2}{16(4l-l^2)}=\frac{3}{8} \iff 2l^2-8l+3=0$$

これを解くと，$l=\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ となり，これは $2-\sqrt{3}<l<2+\sqrt{3}$ を満たす．

$$l=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2} \quad \cdots 答$$

別解

問 2



楕円 C を xy 平面上におき，その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ とおく．

$AB=2\sqrt{3}$ より，焦点の座標は $A(\sqrt{3},\ 0)$，$B(-\sqrt{3},\ 0)$ となり，$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$

また，長軸の長さは 4 であるから，$2a=4$

したがって，$a=2$，$b=1$ となり，

$$C:x^2+4y^2=4$$

点 P の座標を $(p,\ q)$ とおくと，$p^2+4q^2=4 \quad \cdots ②$

また，$PA=l$ より，$(p-\sqrt{3})^2+q^2=l^2 \quad \cdots ③$

②，③ から，q を消去すると，

$$p^2+4\{l^2-(p-\sqrt{3})^2\}=4 \iff 3p^2-8\sqrt{3}\,p+16=4l^2$$

$$\iff (\sqrt{3}\,p-4)^2=(2l)^2$$

$-2<p<2$ より，$\sqrt{3}\,p-4<0$ であるから，

$$\sqrt{3}\,p-4=-2l \iff p=\frac{4-2l}{\sqrt{3}}$$

次に，

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+(1+s)\vec{a}=(p,\ q)+(1+s)(\sqrt{3}-p,\ -q)$$

$$=(\sqrt{3}(1+s)-sp,\ -sq)$$

であり，点 Q も C 上にあるから，

$$\{\sqrt{3}(1+s)-sp\}^2+4(-sq)^2=4$$

$$\iff 3(1+s)^2-2\sqrt{3}(1+s)sp+s^2p^2+s^2\cdot 4q^2=4$$

$$\iff 3(1+s)^2-2\sqrt{3}(1+s)sp+s^2p^2+s^2(4-p^2)=4$$

$$\iff 7s^2+6s-1=2\sqrt{3}(1+s)sp$$

$$\iff (s+1)(7s-1)=2\sqrt{3}(1+s)sp$$

$s>0$ より，

$$7-\frac{1}{s}=2\sqrt{3}\,p=2\sqrt{3}\cdot\frac{4-2l}{\sqrt{3}}=8-4l$$

したがって，

$$s=\frac{1}{4l-1} \quad \cdots 答$$

また，$s=\dfrac{1}{4l-1}$ の s，l をそれぞれ t，$4-l$ に置き換えて，

$$t=\frac{1}{4(4-l)-1}=\frac{1}{15-4l} \quad \cdots 答$$

YMS 数学 前期テキストより的中が出ました!!

YMS数学(前期)テキスト②105ページより抜粋

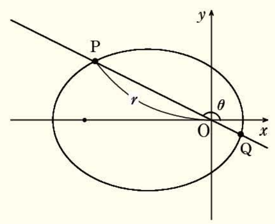
11−6C

直交座標において，原点 O と直線 $x=5$ からの距離の比が $2:3$ である点 $P(x,\ y)$ の軌跡を C とする．

(1)　曲線 C の直交座標に関する方程式を求めよ．

(2)　曲線 C の極方程式を求めよ．

(3)　この楕円の原点 O を通る任意の弦を PQ とするとき，$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}$ の値を求めよ．



解答

(1)　$3\sqrt{x^2+y^2}=2|x-5|$ より，$9(x^2+y^2)=4(x-5)^2 \iff \dfrac{(x+4)^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$

(2)　$3r=2(5-r\cos\theta)$ より，$r=\dfrac{10}{3+2\cos\theta}$

(3)　$P(r,\ \theta)$，$Q(r',\ \theta+\pi)$ とおくと，

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=r+r'=\frac{3+2\cos\theta}{10}+\frac{3+2\cos(\theta+\pi)}{10}=\frac{3}{5}$$

【講評】

昨年に引き続き5題構成となった.

難易度、分量、大きな変化はみられなかった.

一次突破ラインは 55 ％ 程度だと思われる.

[I] : 3 次方程式の解と等比数列

解と係数の関係および等比中項を用いて残りの解を求める.
問題の条件をそのまま式で表し解けばよい. 難易度は標準.

[II] : 確率

前年度に引き続き確率が出題された. 解いてみるとそこまで難しくはないが、
確率を苦手とする人は多いため意外と差がついたことだろう. 難易度は標準.

[III] : 積分方程式

置換をして、加法定理で sin の中身をバラバラにし、微分する.
類題を経験したことがある人は勇気をもって 2 回微分まで考えることができただろう.
ただし、計算力が問われるため完答できた人はそこまで多くないと予想される. 難易度は標準.

[IV] : 複素数平面

(2) の計算がポイント. 極方程式(極形式)を用い、面積を偏角で表し、微分して最大値を求める. 極の取り方によっては計算が煩雑になり、差がついたことだろう. 難易度はやや難.

[V] : 2次曲線・極方程式・ベクトル

(2) を乗り越えられたかどうかがポイントになる. 楕円の定義から, PB, QB の長さを l と s を用いて表し, 余弦定理を用いると計算は軽い. また, 焦点を通る直線と楕円という設定から極方程式を思いつければ求められただろう.
それ以降も正確な計算が必要になり完答は難しいと思われる. 難易度はやや難.