YMS 2018年度 解答速報 近畿大学医学部 前期 数学

1

(1) 関数 $f(x)=27^x-9^x-3^{x+1}+3$ について考える。$f(x)=0$ の解は $x=\boxed{ア}$ である。

また，関数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ とおくとき，$g(x)$ が最小となる x の値は $x=\boxed{イ}$ であり，その最小値は $\boxed{ウ}$ である。

(2) 2つの自然数 m，n の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，$G<m<n<L$ とする。

$$\begin{cases}2\log_3 L-\log_3 G=3+5\log_3 2\\ \log_2 L+\log_2 G=7+3\log_2 3\end{cases}$$

のとき，$m=\boxed{エ}$，$n=\boxed{オ}$

(3) 直線 $y=ax+b$ を l とする。ただし，a，b は定数とする。直線 l 上のどのような点 $(x,\ y)$ に対しても，点 $(5x+6y,\ x+4y)$ もまた l 上にあるとする。このとき，

$$(a,\ b)=\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right),\ \left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ}\right)$$

である。ただし，$\boxed{カ}<\boxed{ク}$ とする。

(1) $3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$$f(x)=t^3-t^2-3t+3=(t-1)(t^2-3)=0$$

より $t=1$ のとき $x=0$，$t=\sqrt{3}$ のとき $x=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ x=\boxed{0,\ \dfrac{1}{2}}$

また，$g(x)=(27^x+27^{-x})-(9^x+9^{-x})-3(3^x+3^{-x})+6$

$3^x+3^{-x}=T$ とおくと，相加相乗平均の関係式から $T=3+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}T=\infty$ より $T\geqq 2$ であることに注意して

$$g(x)=(T^3-3T)-(T^2-2)-3T+6=T^3-T^2-6T+8$$

$$\phi(T)=T^3-T^2-6T+8\ (T\geqq 2)$$

とおけば

$$\phi'(T)=3T^2-2T-6$$

$\phi'(T)=0$ となるのは $\quad T=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

T	2	$\cdots$
ϕ'		+
ϕ	0	↗

となり，$T\geqq 2$ で $\phi'(T)>0$ つまり $\phi(T)$ は単調増加する。

したがって $T=2$ つまり $x=\boxed{0}$ のとき $g(x)$ の最小値 $\phi(2)=\boxed{0}$ をとる。

(2) 連立方程式を変形すると

$$\begin{cases}\log_3\dfrac{L}{G}=\log_3 2^5 3^3\\ \log_2 LG=\log_2 2^7 3^5\end{cases}\quad より\quad \begin{cases}\dfrac{L^2}{G}=2^5 3^3\\ LG=2^7 3^3\end{cases}$$

辺々かけると $L^3=2^{12}3^6$ $\quad\therefore\ L=2^4 3^2,\ G=2^3 3^1$

$m<n$ に注意して $m=G\times 2=24\times 2=\boxed{48}$

$n=G\times 3=24\times 3=\boxed{72}$

(3) $y=ax+b$ 上に $(x,\ y)=(5x+6y,\ x+4y)$ があるので

$$x+4y=a(5x+6y)+b$$

整理して

$$(5a-1)x+(6a-4)y+b=0$$

$y=ax+b$ を代入して

$$(5a-1)x+(6a-4)(ax+b)+b=0$$

$$(6a^2+a-1)x+3b(a-2)=0$$

これが x の恒等式であるから

$$\begin{cases}6a^2+a-1=0\\ 3b(a-2)=0\end{cases}$$

これを解いて $(a,\ b)=\left(\boxed{-\dfrac{1}{2}},\ \boxed{0}\right),\ \left(\boxed{\dfrac{1}{3}},\ \boxed{0}\right)$

2

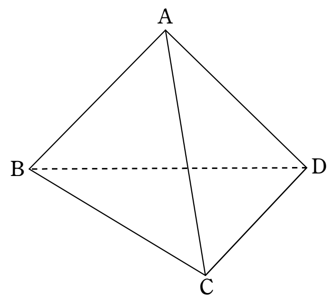
右のような正四面体 ABCD を考える。△BCD，△ACD，△ABD，△ABC の重心をそれぞれ E，F，G，H とすると，正四面体 EFGH ができる。

(1) 正四面体 EFGH の体積は正四面体 ABCD の何倍か求めよ。

(2) 辺AB，AC，AD，CD，DB，BC の中点をそれぞれ I，J，K，L，M，N とすると，正八面体 IJKLMN ができる。正八面体 IJKLMN の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ。

(3) (2)で定めた正八面体 IJKLMN の8つの面 △IJK，△IKM，△IMN，△INJ，△LJK，△LKM，△LMN，△LNJ の重心をそれぞれP，Q，R，S，T，U，V，W とすると，立方体 PQRS−TUVW ができる。立方体 PQRS−TUVW の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ。

(4) (3)で定めた4点 P，Q，R，S を通る平面によって正四面体 ABCD を切り分けたとき，頂点 A，B を含む側の体積は正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ。



(1) 三角形 AND に注目する。

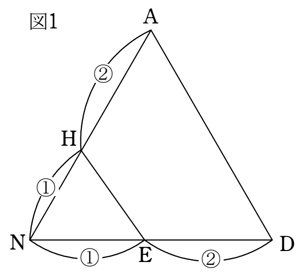
図1から EH : AD＝1 : 3 であるから

ふたつの四面体の相似比は 1 : 3 となる。

体積比は3乗に比例するから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boxed{\frac{1}{27}}\ 倍$$

図1



(2) 図2から四面体 AIJK はABCD の

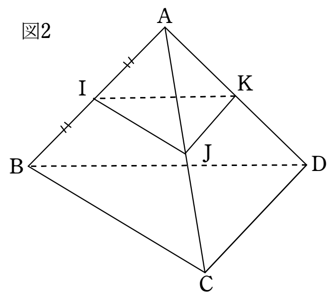
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\ 倍$$

四面体 ABCD からこれを4個分取り除くと考えて

八面体 IJKLMN の体積は四面体 ABCD の

$$1-\frac{1}{8}\times 4=\boxed{\frac{1}{2}}\ 倍$$

図2



(3) 八面体の一辺の長さを3とおいても一般性は失わない。また，IM と JL の中点を X，Y，XY の中点を Z とする。（図4参照）

このとき図3の△KXY に対し

$$KZ=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

したがって，八面体の体積は

$$2\times\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}=9\sqrt{2}$$

また，Q，T は側面の三角形の重心であるから

QT＝2

これは考える立方体の対角線の長さに相当する。

よって立方体の一辺の長さは $\sqrt{2}$ であることがわかる。

これより立方体の体積は

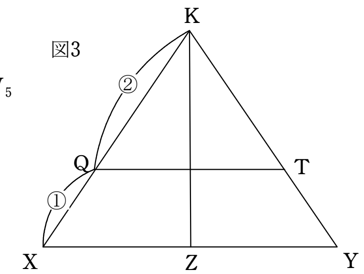
$$(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$$

したがって，(2)と合わせて考えると

$$(立方体の体積)=(四面体ABCDの体積)\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=\frac{1}{9}$$

より $\boxed{\dfrac{1}{9}}$ 倍

図3



(4) 題意の立体は図5における

四面体$AW_1W_2W_3$ と 三角柱 $W_1W_2W_3BW_4W_5$

を合わせたものであるから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}$$

$$=\boxed{\frac{7}{27}}\ 倍$$

図5

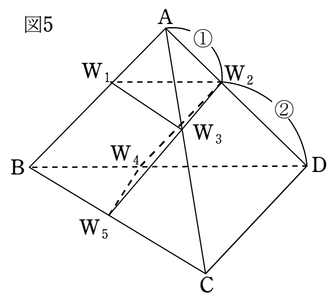
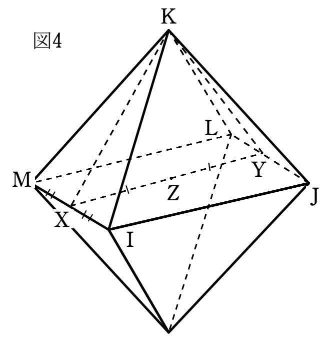


図4



3

3 つの実数 a，b，c が

$$ab=6 \cdots ①,\quad a+b-c^2=1 \cdots ②,\quad c(a-b)=2 \cdots ③$$

を満たすとする。

(1) a，b の符号を求めよ。

(2) ①，②，③ から a，b を消去し $c^2=x$ とおけば，x はある 3 次方程式 $f(x)=0$ を満たす。x^3 の係数が 1 であるような 3 次式 $f(x)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた 3 次方程式 $f(x)=0$ の正の実数解の個数を求めよ。

(4) ①，②，③ を満たす実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

(1) ①から a，b は同符号

②において a，b がともに負であるとすると c が実数にならず不適

これらから　a，b は $\boxed{\text{ともに正}}$

(2) ②，③より

$$\begin{cases} a+b=c^2+1 \\ a-b=\dfrac{2}{c} \end{cases} \quad \text{から} \quad a=\frac{1}{2}\left(c^2+\frac{2}{c}+1\right),\ b=\frac{1}{2}\left(c^2-\frac{2}{c}+1\right) \cdots ④$$

かけ合わせると①から

$$ab=\frac{1}{4}\left\{(c^2+1)^2-\frac{4}{c^2}\right\}=6$$

$c^2=x$ とおいて

$$(x+1)^2-\frac{4}{x}=24 \qquad \text{整理して} \qquad x^3+2x^2-23x-4=0$$

したがって

$$f(x)=\boxed{x^3+2x^2-23x-4}$$

(3)

$$f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x^2+6x+1)=0$$

より

$$x=4,\quad -3\pm2\sqrt{2}$$

$x=c^2>0$ となるのは $x=4$　$\boxed{1\text{個}}$

(4) $c^2=4$ より $c=\pm2$

$c=2$ のとき ④から $a=\dfrac{1}{2}\left(4+\dfrac{2}{2}+1\right)=3,\ b=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{2}{2}+1\right)=2$

$c=-2$ のとき ④から $a=2,\ b=3$

以上より

$$(a,\ b,\ c)=\boxed{(3,\ 2,\ 2)},\ \boxed{(2,\ 3,\ -2)}$$