医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

昭和大学医学部（Ⅱ期） 数学

2024年 3月2日実施

$\boxed{1}$

次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入すること。

(1) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たす複素数 z の値を求めよ。また，このとき $z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}$ の値を求めよ。

(2) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，どのような図形かを述べよ。

(3) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z と，$|w+2-2i|=1$ を満たす複素数 w について，$|z-w|$ の最小値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

(4) n は正の整数とする。次の群に分けられた数列について考える。

$$1|1,\ 1|1,\ 2,\ 1|1,\ 3,\ 3,\ 1|1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1|1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1|1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1|\cdots$$

(4-1) 第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。
(4-2) 与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの総和を求めよ。

解答

(1) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ より，$z^2-\sqrt{2}z+1=0$ である。これを解くと，

$$z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，$z^{2024}=\cos(\pm 506\pi)+i\sin(\pm 506\pi)=1$ である。(以上，複号同順)

したがって，$z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}=1+\dfrac{1}{1}=\mathbf{2}$

(2) $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z^2+1}{z}$ が実数となるとき，

$$\frac{z^2+1}{z}=\overline{\left(\frac{z^2+1}{z}\right)} \quad \cdots\cdots ① \text{ かつ } z\neq 0$$

① を変形すると，

$$\begin{aligned}
&\overline{z}(z^2+1)=z(\overline{z}^2+1)\\
\Longleftrightarrow\ &z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0\\
\Longleftrightarrow\ &(z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0\\
\Longleftrightarrow\ &z\overline{z}=1,\ \text{または } z=\overline{z}
\end{aligned}$$

$$\iff |z| = 1,\quad \text{または}\ z = \overline{z}$$

よって，z が複素数平面上で表す図形は，

$$\boldsymbol{z = \overline{z}\ (z \fallingdotseq 0)},\ \textbf{または}\ \boldsymbol{|z| = 1}$$

(中心 0，半径 1 の円周上，または実軸上（ただし 0 を除く）)

(3)　P(z)，Q(w) とすると，$|z-w|$ は PQ の長さを表すから，これの最小値を考える。
(2) より，P(z) が描く図形は，中心 0，半径 1 の円周上，または実軸上（ただし 0 を除く）である。この円を C とする。
また，

$$|z+2-2i| = 1 \iff |z-(-2+2i)| = 1$$

よって，Q(w) が複素数平面上で描く図形は，中心 $-2+2i$，半径 1 の円である。以下，この円の中心を A とする。
P(z) が実軸上にあるとき，PQ が最小となるのは，A から実軸へ下ろした垂線の上に，A，Q，P の順で並ぶときであり，このとき，

$$|z-w| = 2-1 = 1$$

また，P(z) が円 C 上にあるとき，PQ が最小となるのは，O，P，Q，A がこの順で一直線上に並ぶときであり，このとき，

$$|z-w| = |-2+2i|-1-1 = 2\sqrt{2}-2$$

$1-(2\sqrt{2}-2) = 3-2\sqrt{2} > 3-2(1.5) = 0$ であるから，$|z-w|$ の最小値は，

$$|z-w| = \boldsymbol{2\sqrt{2}-2}$$

(4)(4-1)　第 n 群に含まれる項は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_0,\ {}_{n-1}\mathrm{C}_1,\ \cdots,\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

であるため，総和は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} = (1+1)^{n-1} = \boldsymbol{2^{n-1}}$$

(4-2)

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = \boldsymbol{2^n-1}$$

$\boxed{2}$

x, y は実数とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\log_2(1-3x)+\log_4(x+3) \leqq 2$ を満たすような実数 x の範囲を不等式を用いて表せ。

(2)　$[x]$ は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を表す。方程式 $[3x]-[x]=2$ を満足する x の範囲を不等式を用いて表せ。

(3)　$x>0$ とする。$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

(4)　実数 x, y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき，$x+2xy+y$ の最大値と最小値を求めよ。

(5)　不等式 $||x|-1|+|y| \leqq 1$ を満足する領域を xy 平面上に図示せよ。

解答

(1)　真数条件より

$$1-3x>0 \text{ かつ } x+3>0 \qquad \therefore\ -3<x<\frac{1}{3}\ \cdots\cdots①$$

このもとで

$$\log_2(1-3x)+\log_4(x+3) \leqq 2$$

$$\log_2(1-3x)+\frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} \leqq 2$$

$$2\log_2(1-3x)+\log_2(x+3) \leqq 4$$

$$\log_2(1-3x)^2(x+3) \leqq \log 16$$

$$(1-3x)^2(x+3) \leqq 16$$

$$9x^2+21x^2-17x-13 \leqq 0$$

$$(x-1)(9x^2+30x+13) \leqq 0$$

$$\therefore\ x \leqq \frac{-5-2\sqrt{3}}{3} \text{ または } \frac{-5+2\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq 1\ \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\boldsymbol{-3<x \leqq \frac{-5-2\sqrt{3}}{3},\ \frac{-5+2\sqrt{3}}{3} \leqq x < \frac{1}{3}}$$

(2)　$x=n+\alpha$（n は整数，$0 \leqq \alpha < 1$）と表せる。

(i)　$0 \leqq \alpha < \dfrac{1}{3}$ のとき

$[3x]=3n$，$[x]=n$ であるから，与えられた方程式は

$$3n-n=2$$

$$\therefore\ n=1$$

であるから，x の範囲は $1 \leqq x < \dfrac{4}{3}$

(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq \alpha < \dfrac{2}{3}$ のとき

$[3x] = 3n+1$，$[x] = n$ であるから，与えられた方程式は

$$(3n+1) - n = 2$$

であるが，これを満たす整数 n は存在しない。

(iii) $\dfrac{2}{3} \leqq \alpha < 1$ のとき

$[3x] = 3n+2$，$[x] = n$ であるから，与えられた方程式は

$$(3n+2) - n = 2$$
$$\therefore n = 0$$

であるから，x の範囲は $\dfrac{2}{3} \leqq x < 1$

以上，(i)(ii)(iii) より，求める x の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{2}{3} \leqq x < \dfrac{4}{3}}$

(3)

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x + \frac{1}{2x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{2}$$

である。ここで，$x^2 > 0$，$\dfrac{1}{x^2} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係の不等式より

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}$$
$$\therefore\ x^2 + \frac{1}{x^2} \geqq 2$$
$$\left(\text{等号成立は，} x^2 = \frac{1}{x^2}\text{，すなわち } x = 1 \text{ のとき}\right)$$

であるから，

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x + \frac{1}{2x}\right) \geqq 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$
$$(\text{等号成立は，} x = 1 \text{ のとき})$$

となるので，求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

(4)　$x+y=u$, $xy=v$ とおくと，条件は

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} x,\ y \text{ は実数} \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } (t-x)(t-y)=0 \text{ の } 2 \text{ 解は実数} \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } t^2-ut+v=0 \text{ の } 2 \text{ 解は実数} \\ u^2-v=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \text{判別式 } D=u^2-4v \geqq 0 \\ v=u^2-1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} u^2-4(u^2-1) \geqq 0 \\ v=u^2-1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 3u^2-4 \leqq 0 \\ v=u^2-1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} v=u^2-1 \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \leqq u \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

と書き直せる。このとき

$$
\begin{aligned}
x+2xy+y &= u+2v \\
&= u+2(u^2-1) \\
&= 2\left(u+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}
\end{aligned}
$$

は

$$
\begin{aligned}
&u=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{のとき最大値：}\boldsymbol{\frac{2+2\sqrt{3}}{3}} \\
&u=-\frac{1}{4}\text{のとき最小値：}\boldsymbol{-\frac{17}{8}}
\end{aligned}
$$

をとる。

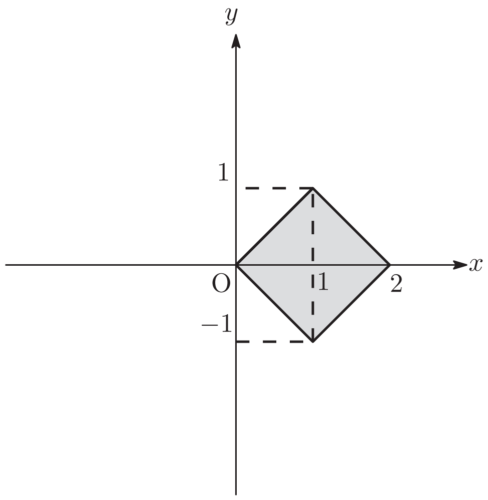
(5)

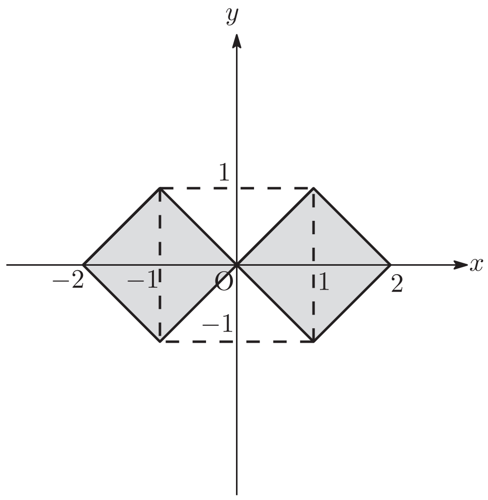
$$||x|-1|+|y| \leqq 1 \ \cdots\cdots ①$$

①は x を $-x$ としても変わらないから，
①を満たす領域は y 軸に関して対称である。
まず，$x \geqq 0$ で考える。
このとき①は

$$|x-1|+|y| \leqq 1 \ \cdots\cdots ②$$

である。
②を満たす領域は，$|x|+|y| \leqq 1$ を満たす領域（注釈）を x 軸方向に 1 だけ平行移動してできる領域であるから，
下左図の影の部分（境界を含む）となる。
さらに，y 軸に関して対称移動してできる領域を加えて，求める領域は下右図の影の部分となる（境界を含む)。





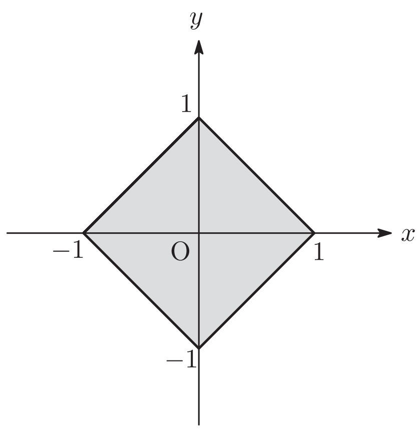
注釈

$|x|+|y| \leqq 1$ を満たす領域について。

x，y の符号で場合を分けると

$$
\begin{cases}
x \geqq 0,\ y \geqq 0 \text{ のとき} & x+y \leqq 1 \\
x \leqq 0,\ y \geqq 0 \text{ のとき} & -x+y \leqq 1 \\
x \geqq 0,\ y \leqq 0 \text{ のとき} & x-y \leqq 1 \\
x \leqq 0,\ y \leqq 0 \text{ のとき} & -x-y \leqq 1
\end{cases}
$$

であるから，これを満たす領域は下図の影部分である（境界含む）。



$\boxed{3}$

xy 平面において，曲線 $y=x^4-4x^2+4x+2$ を①，曲線①と異なる 2 点で接する直線を②，直線②と平行で曲線①にただ 1 点で接する直線を③とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入すること。

(1)　直線②の方程式を求めよ。

(2)　直線③の方程式を求めよ。

(3)　曲線①と直線②で囲まれた面積 S_1 を求めよ。

(4)　曲線①と直線③で囲まれたすべての部分の面積の和 S_2 を求めよ。

(5)　$f(x)=x^4-4x^2+4x+2$ は，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha \fallingdotseq \beta)$ で極小値をとり，$x=\gamma$ で極大値をとるものとする。3 点 $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta)),\ \gamma,\ f(\gamma))$ をすべて通り，軸が y 軸に平行な放物線の方程式を求めよ。

解答

$f(x)=x^4-4x^2+4x+2$ とおく。

(1)　直線 ② を $y=ax+b$ とおく。① と ② は 2 点で接するため，方程式

$$\begin{aligned} &x^4-4x^2+4x+2=ax+b \\ \Longleftrightarrow\ &x^4-4x^2+(4-a)x+2-b=0 \end{aligned}$$

は 2 つの重解を持つ。2 つの解を $p,\ q$ とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2p+2q=0 & \cdots(\mathrm{i}) \\ p^2+4pq+q^2=-4 & \cdots(\mathrm{ii}) \\ 2p^2q+2pq^2=-4+a & \cdots(\mathrm{iii}) \\ p^2q^2=2-b & \cdots(\mathrm{iv}) \end{cases}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} -4+a &= 2p^2q+2pq^2 \\ &= 2pq(p+q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $a=4$ である。また

$$\begin{aligned} -4 &= p^2+4pq+q^2 \\ &= (p+q)^2+2pq \\ &= 2pq \end{aligned}$$

と (iv) より $b=2-(pq)^2=-2$ である。こうして直線 ① の式は $\boldsymbol{y=4x-2}$ である。

※ここで接点は $\pm\sqrt{2}$ であることも計算できる。

注釈

$x^4-4x^2+(4-a)x+2-b=0$ が 2 つの重解をもつので，それを $x=p,\ q$ とすると

$$x^4-4x^2+(4-a)x+2-b=(x-p)^2(x-q)^2$$

$$x^4-4x^2+(4-a)x+2-b=x^4-2(p+q)x^3+(p^2+4pq+q^2)x^2-2pq(p+q)x+p^2q^2$$

が x の恒等式となることから，両辺の係数を比較して (i)〜(iv) を導いてもよい。

(2)　$f'(x)=4x^3-8x+4$ である。

$f'(x)=4$ を整理すると $4x(x^2-2)$ となるため，傾きが 4 になる接線との接点の x 座標は 0, ±2 となる。

±2 は (1) の直線の場合であるため，① と ③ は $x=0$ で接する。よって $\boldsymbol{y=4x+2}$ である。

(3)　① と ② は $x=\pm\sqrt{2}$ で接するため

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)dx\\
&=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2dx\\
&=\frac{1}{30}\left\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\right\}^5\\
&=\boldsymbol{\frac{64}{15}\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(4)　① と ③ の交点の x 座標は $x^4-4x^2=0$ の解であるため $x=0,\pm2$ である。よって

$$\begin{aligned}
S_2&=\int_{-2}^{2}(4x^2-x^4)dx\\
&=2\int_{0}^{2}(4x^2-x^4)dx\\
&=2\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right]_0^2\\
&=\boldsymbol{\frac{128}{15}}
\end{aligned}$$

(5)（束の考え方を使う）

求める放物線を ④ , その方程式を $y=cx^2+dx+e$ とおく。任意の実数 $s,\ t$ について

$$(x^4-4x^2+4x+2-y)s+(cx^2+dx+e-y)t=0\quad\cdots(*)$$

は ① と ④ の交点をすべて通る図形の方程式である。つまり $(*)$ は $(x,\ y)=(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta)),\ (\gamma,\ f(\gamma))$ を解に持つ。

ここで $s=1,\ t=-1$ とすると

$$(x^4-4x^2+4x+2)-(cx^2+dx+e)=0$$

は $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を解に持つ x の方程式になる。

$\alpha,\ \beta,\gamma$ は $f'(x)=4x^3-8x+4=0$ の解であるため，ある多項式 $f(x)$ が存在して

$$(x^4-4x^2+4x+2)-(cx^2+dx+e)=(x^3-2x+1)f(x)$$

と表される。ここで

$$x^4-4x^2+4x+2=(x^3-2x+1)x-2x^2+3x+2$$

であるため，2 式を比較することで $\boldsymbol{y=-2x^2+3x+2x}$ が求める放物線の方程式と分かる。

注釈

次の公式を知っておくと簡単に計算ができる。

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^m dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

$\boxed{4}$

ある地域で感染症 A が流行している。その地域の住民を無作為に選んで感染症 A の検査 X を行うこととした。実際に感染症 A に感染している人が検査 X を受けると $\dfrac{7}{10}$ の確率で陽性と判定される。ところが実際には感染症 A に感染していない人でも検査 X を受けると $\dfrac{1}{10}$ の確率で陽性と判定されてしまう。ここで，その地域の住民全体に占める真の感染者の割合を $\dfrac{1}{100}$ とするとき，次の各問いに答えよ。ただし，答えは k 既約分数で表して，結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 無作為に選ばれた人が検査 X を受けたとき，感染症 A にかかっていて，かつ検査 X て陽性と判定される確率を求めよ。

(2) 無作為に選ばれた人が検査 X を受けたとき，陽性と判定される確率を求めよ。

(3) 検査 X で陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率を求めよ。

(4) 検査 X で陽性と判定されなかった人が実際に感染症 A に感染していない確率を求めよ。

(5) 検査 X で陽性と判定された人には速やかに 2 回目の検査 X を行う。 2 回目の検査 X でも陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率を求めよ。

解答

ある感染症 A にかかっているという事象を L，検査 X で陽性と判定される事象を M とする。

(1) $P(L\cap M)=\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{7}{10}=\mathbf{\dfrac{7}{1000}}$

(2) $P(M)=P(L\cap M)+P(\overline{L}\cap M)=\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{7}{10}+\dfrac{99}{100}\cdot\dfrac{1}{10}=\mathbf{\dfrac{53}{500}}$

(3) $P_M(L)=\dfrac{P(L\cap M)}{P(M)}=\dfrac{\frac{1}{100}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{53}{500}}=\mathbf{\dfrac{7}{106}}$

(4) $P_{\overline{M}}(\overline{L})=\dfrac{P(\overline{L}\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\dfrac{P(\overline{L}\cap\overline{M})}{P(L\cap\overline{M})+P(\overline{L}\cap\overline{M})}=\dfrac{\frac{99}{100}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{10}+\frac{99}{100}\cdot\frac{9}{10}}=\mathbf{\dfrac{297}{298}}$

注釈

余事象を用いて

$P_{\overline{M}}(\overline{L})=\dfrac{P(\overline{L}\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\dfrac{P(\overline{L}\cap\overline{M})}{1-P(M)}=\dfrac{\frac{99}{100}\cdot\frac{9}{10}}{1-\frac{53}{500}}=\mathbf{\dfrac{297}{298}}$ と求めてもよい。

(5) 1 回目の検査 X で陽性と判定された人が 2 回目の検査 X でも陽性と判定される事象を N とすると，求める確率は

$$\frac{P(L\cap M\cap N)}{P(L\cap M\cap N)+P(\overline{L}\cap M\cap N)}=\frac{\frac{1}{100}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}=\mathbf{\frac{49}{148}}$$

講評

$\boxed{1}$ ［(1),(2),(3) 複素数，(4) 数列］（標準）：どちらも標準的な問題であった。(4) は二項係数が並んでいることに気付けば一発である（容易に予想もできてしまうが…）。

$\boxed{2}$ ［小問集合］（標準）：(2)，(4) が少々やりにくいが，それ以外の問題はあまり難しくない。計算ミスをさけるようにしたい。

$\boxed{3}$ ［微分・積分］（標準）：実直に式を計算しても良いが，異なる 2 点で接することが 4 次関数が 2 つの重解を持つことだと気付けば簡単に解ける。

$\boxed{4}$ ［確率］（やや易）：条件付き確率に関する基本的な問題である。ここは完答したい。

所々解きにくい問題があったが，全体としてはそこまで難しくはない。解ける問題を確実に得点したい。一次突破ボーダーは 65% 程度か。