聖マリアンナ医科大学(後期)　数学

2024年 3月5日実施

$\boxed{1}$

以下の (1) ～ (3) の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(1)　正二十面体の各面は正三角形である. この立体の頂点の個数は $\boxed{\text{ア}}$ 個であり, 辺の本数は $\boxed{\text{イ}}$ 本である.

(2)　2 点 $\mathrm{P}_0(1,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{P}_1(-1,\ 0,\ 4)$ を通る直線と平面 $z=0$ の共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}},\ 0\right)$ である.

また原点 O から直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ に下ろした垂線 OH の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{3}$ である.

(3)　$\theta=\dfrac{3}{10}\pi$ とおく. このとき, $\sin 3\theta+\cos 2\theta=\boxed{\text{カ}}$ となる.
したがって $\sin\theta$ は

$$4\sin^3\theta+\boxed{\text{キ}}\sin^2\theta-\boxed{\text{ク}}\sin\theta-1=0$$

を満たす. これより $\sin\theta$ の値を求めると, $\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{4}$ となる.

解答

(1)　1 個の頂点につき 5 つの三角形が接しているため, 頂点の個数は $3\times 20\div 5=\mathbf{12}$ 個.
1 本の辺につき 2 つの三角形が接しているため, 辺の本数は $3\times 20\div 2=\mathbf{30}$ 本.

注釈

オイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ を用いてもよい. 正二十面体の形がわからない場合でも, 辺の本数は 30 本と求まるので, $e=30$, $f=20$ を代入して $v=12$ を得る.

(2)　直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ と $z=0$ の交点を P_2 とおく.
P_0 と P_1 の z 座標に注意すると, P_0 は線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点である. よって $\mathrm{P}_2(\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0})$.
$\triangle\mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1=\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}\cdot\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ である.

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_2})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 17-7^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{53}\\\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1&=\sqrt{(1-(-1))^2+(1-0)^2+(2-4)^2}\\&=3\end{aligned}$$

より $\mathrm{OH} = 2 \times \dfrac{\sqrt{53}}{2} \div 3 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{53}}{3}}$.

別解

直線 $\mathrm{P_0P_1}$ 上の点を P とすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + k\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} \\ &= (1-2k,\ 1-k,\ 2+2k)\end{aligned}$$

点 P が xy 平面 (平面 $z=0$) 上にあるとき，$2+2k=0$，すなわち $k=-1$

よって，求める共有点の座標は $\mathbf{(3,\ 2,\ 0)}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$ をみたす点 P が H であるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} \neq \overrightarrow{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} = 0 \iff k = -\frac{1}{9}$$

よって，$\mathrm{H}\left(\dfrac{11}{9},\ \dfrac{10}{9},\ \dfrac{16}{9}\right)$ であることより

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} &= \frac{1}{9}\sqrt{11^2+10^2+16^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{53}}{3}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sin\frac{9}{10}\pi + \cos\frac{6}{10}\pi &= \sin\left(\pi - \frac{1}{10}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{10}\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

三倍角の公式と倍角の公式から

$$(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) + (1 - 2\sin^2\theta) = 0$$

これを整理して

$$\boldsymbol{4\sin^3\theta + 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 1 = 0}$$

$\sin\theta = t$ とおくと $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0 \quad \cdots$① は $t=-1$ を解に持つため，左辺を $t+1$ で割ることで $4t^2 - 2t - 1$ を得る．よって ① の解は $t = 1,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$．$\sin\dfrac{3}{10}\pi > 0$ であるため $\sin\dfrac{3}{10}\pi = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

注釈

$5\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ より $3\theta = \dfrac{3}{2}\pi - 2\theta$

したがって

$$\begin{aligned}&\sin 3\theta = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\theta\right) \\ \iff &\sin 3\theta = -\cos 2\theta\end{aligned}$$

よって，$\sin 3\theta + 2\cos\theta = \mathbf{0}$.

$\boxed{2}$

自然数 n に対して，有理数 a_n，b_n を

$$a_n + b_n\sqrt{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdots\cdots (*)$$

を満たすように定める．以下の (1)，(2) に対する解答と (3)，(4) の $\boxed{\text{シ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　二項定理を用いて式 $(*)$ の右辺を展開して，

$$a_n = \sum_{k=0}^{A} {}_n\mathrm{C}_{2k} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

と表すとき，$A = \boxed{\text{コ}}$，$B = \boxed{\text{サ}}$ である．$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ にあてはまるものを，次の選択肢からそれぞれ選び，その記号を答えよ．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとものとする．

【選択肢】

ⓐ $\left[\frac{n-1}{2}\right]$　　ⓑ $\left[\frac{n}{2}\right]$　　ⓒ $\left[\frac{n+1}{2}\right]$　　ⓓ $\left[\frac{n}{2}\right]+1$　　ⓔ $\left[\frac{n}{2}\right]+2$

(2)　自然数 n に対して，有理数 c_n，d_n を

$$c_n + d_n\sqrt{5} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

を満たすように定める．c_n，d_n を a_n，b_n を用いてそれぞれ表せ．

(3)　a_n，b_n の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{シ}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \boxed{\text{ス}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$b_n = \boxed{\text{セ}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \boxed{\text{ソ}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる．なお $\boxed{\text{シ}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ は n を含まない数である．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \boxed{\text{タ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　二項定理から

$$a_n = \sum_{k=0}^{A} {}_n\mathrm{C}_{2k} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

ただし，A は $2k \leqq n$ を満たす最大の整数 k である．$2k \leqq n \iff k \leqq \dfrac{n}{2}$ より $A = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ である．

同じく二項定理から

$$\sqrt{5}b_n = \sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} \sqrt{5}$$

$$\therefore\ b_n = \sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

ただし，B は $2k+1 \leqq n$ を満たす最大の整数 k である．$2k+1 \leqq n \iff k \leqq \dfrac{n-1}{2}$ より $B = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ である．

以上より A, B はそれぞれ **ⓑ, ⓐ**.

(2) $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left\{\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^n$ より，

(1) と同様に考えて

$$c_n = \sum_{k=0}^{A} {}_n\mathrm{C}_{2k} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

$$\sqrt{5}d_n = \sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$$= -\sum_{k=0}^{B} {}_n\mathrm{C}_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k-1}$$

より $c_n = \boldsymbol{a_n}$, $d_n = \boldsymbol{-b_n}$.

(3) (2) より

$$\begin{cases} a_n + b_n\sqrt{5} = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \cdots ① \\ a_n - b_n\sqrt{5} = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \cdots ② \end{cases}$$

$\dfrac{①+②}{2}$ から

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$\dfrac{①-②}{2}$ から

$$b_n = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

(4)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{\dfrac{1}{2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{\dfrac{1}{2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{1}{2}+0}{\dfrac{1}{2\sqrt{5}}-0} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

$\boxed{3}$

実数の閉区間 $A=[-1,3]$, $B=[-2,1]$ と関数 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ を考える.
以下の (1)〜(5) の $\boxed{\text{チ}}$〜$\boxed{\text{フ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(1) $f(3)$ の値を求めると $f(3)=\boxed{\text{チ}}$ である. $f(x)$ の A における極大値, 最大値, 最小値を求めると, 極大値は $\boxed{\text{ツ}}$, 最大値は $\boxed{\text{テ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である.

(2) y に関する条件「$f(x)=y$ を満たす $A\cup B$ の要素 x が存在する」が真となる y の範囲は $\boxed{\text{ナ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ニ}}$ である.

(3) y に関する条件「$f(x_1)=y$ を満たす A の要素 x_1 が存在する, または $f(x_2)=y$ を満たす B の要素 x_2 が存在する」が真となる y の範囲は $\boxed{\text{ヌ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ネ}}$ である.

(4) y に関する条件「$f(x)=y$ を満たす $A\cap B$ の要素 x が存在する」が真となる y の範囲は $\boxed{\text{ノ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{ハ}}$ である.

(5) y に関する条件「$f(x_1)=y$ を満たす A の要素 x_1 が存在し, かつ $f(x_2)=y$ を満たす B の要素 x_2 が存在する」が真となる y の範囲は $\boxed{\text{ヒ}}\leqq y\leqq\boxed{\text{フ}}$ である.

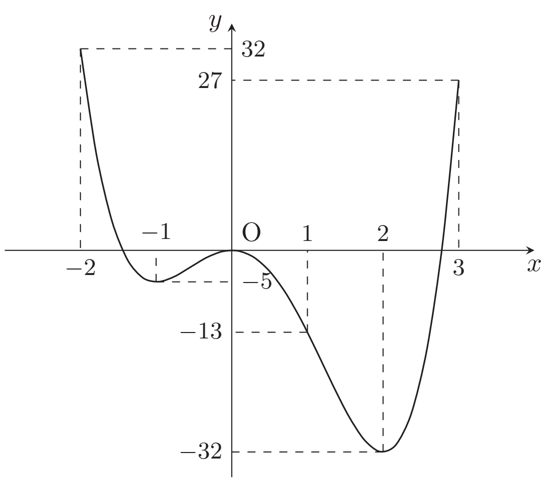
$\boxed{\text{解答}}$

(1) $f(3)=3^3(3^2-4-4)=\mathbf{27}$
$f'(x)=12x(x+1)(x-2)$ であるので, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

$f(3)=27$ であることとあわせて, $f(x)$ は A において

極大値 : $\mathbf{0}$ $(x=0)$, 最大値 : $\mathbf{27}$ $(x=3)$, 最小値 : $\mathbf{-32}$ $(x=2)$



(2) $A\cup B=[-2,\ 3]$ での最大値と最小値を求めればよい. 図より $\boldsymbol{-32\leqq y\leqq 32}$.
(3) 図より「$f(x_1)=y$ を満たす A の要素 x_1 が存在する」y の条件は $-32\leqq y\leqq 27$,「$f(x_2)=y$ を満たす B の要素 x_2 が存在する」y の条件は $-13\leqq y\leqq 32$ であるため, 求める条件は $\boldsymbol{-32\leqq y\leqq 32}$.
(4) $A\cap B=[-1,\ 1]$ での最大値と最小値を求めればよい. 図より $\boldsymbol{-13\leqq y\leqq 0}$.
(5) (3) より $\boldsymbol{-13\leqq y\leqq 27}$.

$\boxed{4}$

$f(x)=x(x-1)(x-3)$ とし, 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx$ (m は実数) は 3 点 O(0, 0), P(x_1, mx_1), Q(x_2, mx_2) ($0<x_1<x_2$) を共有するものとする.

以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{ヘ}}$〜$\boxed{\text{メ}}$ にあてはまる適切な数および (4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(1) m の範囲を求めると $\boxed{\text{ヘ}}<m<\boxed{\text{ホ}}$ である.

(2) ${x_1}^2+{x_2}^2$, ${x_1}^3+{x_2}^3$, ${x_1}^4+{x_2}^4$ を m を用いた式で表すと

$${x_1}^2+{x_2}^2=\boxed{\text{マ}}m+10$$

$${x_1}^3+{x_2}^3=\boxed{\text{ミ}}m+28$$

$${x_1}^4+{x_2}^4=2m^2+\boxed{\text{マ}}m+82$$

となる.

(3) 線分 OP と曲線 $y=f(x)$ の囲む部分の面積を S_1, 線分 PQ と曲線 $y=f(x)$ の囲む部分の面積を S_2 とするとき, $S_1:S_2=1:2$ となるような m の値を求めると $m=\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{3}$ である.

(4) (3) の m の値の計算過程を記せ.

$\boxed{\text{解答}}$

曲線 $y=f(x)$ を C, 直線 $y=mx$ を l とおく.

(1) 条件を満たす P, Q が存在するのは $f(x)=mx$ が異なる 3 つの実数解を持つときである.

$$f(x)=mx$$
$$\Longleftrightarrow x(x-1)(x-3)=mx$$
$$\Longleftrightarrow x\{x^2-4x+(3-m)\}=0$$

より $x^2-4x+3-m=0$ が (0 ではない) 異なる正の実数解を持つ条件を求めればよい. 条件を式で表すと

$$\begin{cases} D>0 \\ 4>0 \\ 3-m>0 \end{cases}$$

である. (ただし $x^2-4x+3-m=0$ の判別式を D とおいた.)

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(3-m)=1+m$ より $\boldsymbol{-1<m<3}$ を得る.

$\boxed{\text{別解}}$

C と l が接する m を求める.

$f'(t)=3t^2-8t+3$ より $(t,\ f(t))$ における C の接線の式は

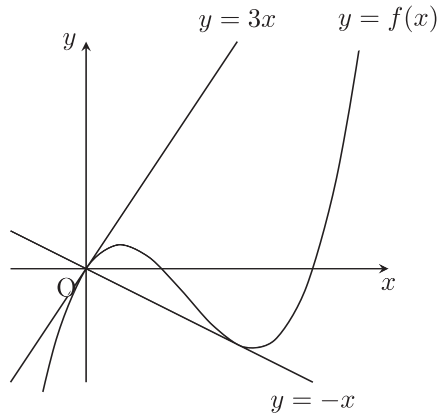
$$y=(3t^2-8t+3)(x-t)+(t^3-4t^2+3t)$$

これは (0, 0) を通るため

$$0=-t(3t^2-8t+3)+(t^3-4t^2+3t)=-2t^3+4t^2$$

これを解くと $t=0,\ 2$ である．

$f'(0)=3,\ f'(2)=-1$ と図より $\boldsymbol{-1<m<3}$ である．



(2)　$f(x)-mx=x(x-1)(x-3)-mx=x\{x^2-4x+(3-m)\}$ である．

一方，l と C の交点の x 座標は $0,\ x_1,\ x_2$ であるため，解と係数の関係から

$$\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=3-m \end{cases}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} {x_1}^2+{x_2}^2 &= (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \\ &= 16-2(3-m) \\ &= \boldsymbol{2m+10} \\ {x_1}^3+{x_2}^3 &= (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \\ &= 64-3\cdot 4(3-m) \\ &= \boldsymbol{12m+28} \\ {x_1}^4+{x_2}^4 &= ({x_1}^2+{x_2}^2)^2-2(x_1x_2)^2 \\ &= (2m+10)^2-2(3-m)^2 \\ &= \boldsymbol{2m^2+52m+82} \end{aligned}$$

(3)，(4)　$S_1:S_2=1:2$ より $2S_1-S_2=0$ である．

$$\begin{aligned} 0 &= 2S_1-S_2 \\ &= 2\int_0^{x_1}(x^3-4x^2+(3-m)x)dx-\int_{x_1}^{x_2}-(x^3-4x^2+(3-m)x)dx \\ &= 2\int_0^{x_1}(x^3-4x^2+(3-m)x)dx \\ &\quad +\int_0^{x_2}(x^3-4x^2+(3-m)x)dx-\int_0^{x_1}(x^3-4x^2+(3-m)x)dx \\ &= \int_0^{x_1}(x^3-4x^2+(3-m)x)dx+\int_0^{x_2}(x^3-4x^2+(3-m)x)dx \\ &= \Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3-m}{2}x^2\Big]_0^{x_1}+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3-m}{2}x^2\Big]_0^{x_2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}({x_2}^4 + {x_1}^4) - \frac{4}{3}({x_2}^3 + {x_1}^3) + \frac{3-m}{2}({x_2}^2 + {x_1}^2) \\
&= \frac{1}{4}(2m^2 + 52m + 82) - \frac{4}{3}(12m + 28) + \frac{3-m}{2}(2m + 10) \\
&= -\frac{1}{2}m^2 - 5m - \frac{11}{6} \\
&= -\frac{3m^2 + 30m + 11}{6}
\end{aligned}
$$

である．これを解いて $m = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225 - 33}}{3} = \dfrac{-15 \pm 8\sqrt{3}}{3}$ を得る．

$\left(8\sqrt{3}\right)^2 = 192$，$169 < 192 < 196$ より $13 < 8\sqrt{3}\sqrt{3} < 14$ である．よって $-\dfrac{29}{3} < \dfrac{-15 - 8\sqrt{3}}{3} < -\dfrac{28}{3}$，

$-\dfrac{2}{3} < \dfrac{-15 + 8\sqrt{3}}{3} < -\dfrac{1}{3}$ である．

(1) より $-1 < m < 3$ なので，$m = \boldsymbol{\dfrac{-15 + 8\sqrt{3}}{3}}$．

講評

$\boxed{1}$［小問集合］（やや易）：正二十面体の問題は見慣れないかもしれないが，難しい問題ではない．完答したい．

$\boxed{2}$［数列・極限］（やや易）：パッと見面くらうかもしれないが，誘導に乗ればそこまで難しくはない．

$\boxed{3}$［集合・微分］（標準）：集合の用語の理解度をチェックする問題であった．慣れていないと難しいかもしれない．

$\boxed{4}$［微分・積分］（標準）：基本的な問題であるが計算が少々大変である．ミスなく計算したい．

基本的な問題から成るセットであったが，一部解きにくい問題もあったであろう．焦らずしっかり考えれば解けるだろう．一次突破ラインは 60〜65% 程度か．