解答速報

日本大学医学部 N方式（2期）二次試験　数学

2024年 3月17日実施

[I]

$a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ とおく．以下の問いに答えなさい．

(1)　$a+\dfrac{2}{a}$ の値を求めなさい．

(2)　a は無理数であることを証明しなさい．ただし，必要なら，$\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてよい．

解答

(1)

$$\begin{aligned} a+\frac{2}{a} &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3} \\ &= \mathbf{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(2)　$a\ (\fallingdotseq 0)$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}=a$$

$$\sqrt{5}=a-\sqrt{3}$$

$$5=(a-\sqrt{3})^2$$

$$5=a^2-2\sqrt{3}a+3$$

$$\sqrt{3}=\frac{a^2-2}{2a}\quad\cdots\cdots①$$

①において，右辺は有理数であり，左辺は問題文により無理数であるから矛盾である．
ゆえに，a は有理数ではない，すなわち無理数である．

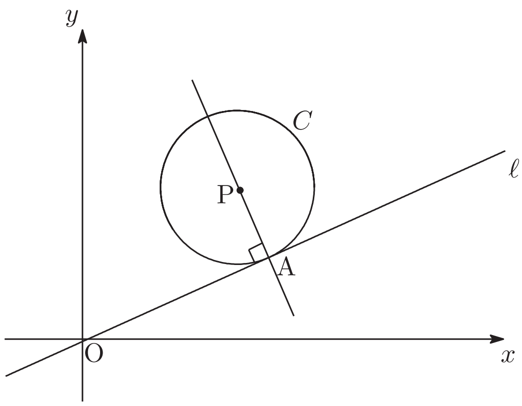
[Ⅱ]

円 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 原点 O から円 C に接線を引くとき，傾きが小さい方の接線を ℓ とし，その接点を A とする．ℓ の方程式と A の座標を求めなさい．

(2) 直線 $y=\dfrac{3}{2}x$ と円 C との交点のうち，x 座標が大きいほうを点 B とする．B と (1) の A および原点 O とで作られる三角形 OAB の面積を求めなさい．

解答



円 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ は中心 $(2,\ 2)$，半径 1 の円である．

(1) ℓ の傾きを m とすると，$\ell: y=mx$ と表せる．ℓ と円 C は接することから，円 C の中心 $(2,\ 2)$ と直線 $mx-y=0$ の距離は 1 となるので，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|2m-2|}{\sqrt{1+m^2}}=1 \iff 2|m-1|=\sqrt{1+m^2}$$

両辺を 2 乗して

$$4(m-1)^2=m^2+1$$

$$3m^2-8m+3=0$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$$

ℓ は傾きが小さい方の接線なので

$$m=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

よって $\ell:\boldsymbol{y=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}x}$

円 C の中心を P，直線 ℓ の方向ベクトルの 1 つを $\overrightarrow{\ell}=(3,\ 4-\sqrt{7})$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\ell}$ 上への正射影ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \frac{\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\ell}|^2}\overrightarrow{\ell}\\ &= \frac{14-2\sqrt{7}}{32-8\sqrt{7}}(3,\ 4-\sqrt{7})\\ &= \frac{7-\sqrt{7}}{4(4-\sqrt{7})}(3,\ 4-\sqrt{7})\\ &= \left(\frac{7+\sqrt{7}}{4},\ \frac{7-\sqrt{7}}{4}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{7+\sqrt{7}}{4},\ \frac{7-\sqrt{7}}{4}}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$

　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4-\sqrt{7}\end{pmatrix}=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=k\begin{pmatrix}4-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$ $(k>0)$ と表すことができる．ここで，

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}4-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}\right| &= \sqrt{32-8\sqrt{7}}\\ &= 2\sqrt{8-2\sqrt{7}}\\ &= 2\left(\sqrt{7}-1\right)\end{aligned}$$

であり，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=1$ であることから

$$k=\frac{1}{2\left(\sqrt{7}-1\right)}=\frac{\sqrt{7}+1}{12}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{12}\begin{pmatrix}4-\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}\\-\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}\end{pmatrix}$

ゆえに，

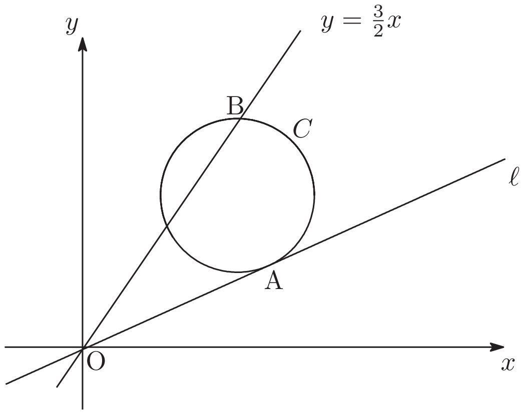
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\\ &= \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}\\-\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{7+\sqrt{7}}{4}\\\dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{7+\sqrt{7}}{4},\ \frac{7-\sqrt{7}}{4}}\right)$

注釈

ほか直線の交点として求めたり，連立するなどの方法も考えられるが，正射影ベクトルの利用が計算量が抑えられ，素早く計算できる．

(2)



点 B の座標を求める．$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ に $y=\dfrac{3}{2}x$ を代入して

$$\begin{aligned}
&(x-2)^2+\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2=1\\
&\frac{13}{4}x^2-10x+7=0\\
&13x^2-40x+28=0\\
&(13x-14)(x-2)=0\\
\therefore\ \ &x=\frac{14}{13},\ 2
\end{aligned}$$

ゆえに，B(2, 3) である．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{7}+7}{4}\\ \dfrac{7-\sqrt{7}}{4}\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ であることから，△OAB の面積は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|3\cdot\frac{7+\sqrt{7}}{4}-\frac{7-\sqrt{7}}{4}\cdot 2\right|\\
=&\frac{1}{8}|7+5\sqrt{7}|\\
=&\boldsymbol{\frac{7+5\sqrt{7}}{8}}
\end{aligned}$$

注釈

一般に，座標平面上の 3 点 A，B，C を結んでできる三角形について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ であるとき，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\ \text{の面積})=\frac{1}{2}|x_1y_2-y_1x_2|$$

である．

注釈

Bの座標は円 C が中心 $(2,\ 2)$，半径1の円であることから直線 $y=\dfrac{3}{2}x$ 上にある $(2,\ 3)$ であるとすぐにわかる．

[III]

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 座標平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(2) $\alpha>1$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上に点 $\mathrm{P}_1(\alpha,\ f(\alpha))$ を，曲線 $y=g(x)$ 上に点 $\mathrm{P}_2(\alpha,\ g(\alpha))$ をとる．P_1 における $y=f(x)$ の接線を ℓ_1，P_2 における $y=g(x)$ の接線を ℓ_2 とするとき，ℓ_1 および ℓ_2 をそれぞれ求めなさい．

(3) $\alpha>1$ として，(2) の ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標が $-\dfrac{11}{3}$ であるとき，α の値を求めて，ℓ_1，ℓ_2 および $x=\alpha$ で囲まれる部分の面積を求めなさい．

解答

(1) $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$ より，$y=f(x)$，$y=g(x)$ は偶関数である．
$f(x)=g(x)$ を解くと，$x=\pm 1$ である．
よって，求める面積を S とすると

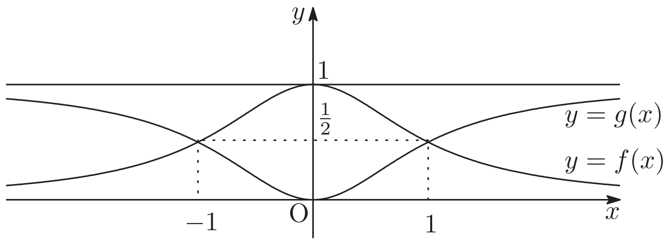
$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx\\&=\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

$x=\tan\theta$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan^2\theta)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta\\&=\Big[2\theta-\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

よって

$$S=\boldsymbol{\pi-2}$$



(2) $f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，$g'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ より，直線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式はそれぞれ

$$y=-\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha)+\frac{1}{1+\alpha^2},\ y=\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha)+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

すなわち

$$\boldsymbol{y=-\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}x+\frac{1+3\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2},\ y=\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}x+\frac{\alpha^4-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}}$$

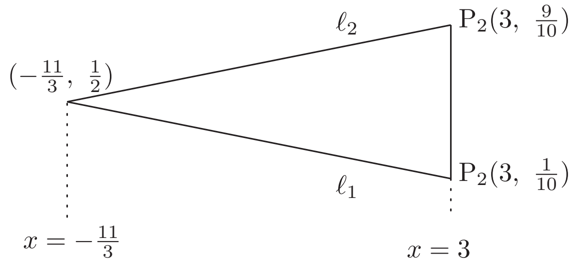
(3)　$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$，すなわち $1-y=\dfrac{1}{1+x^2}$ であるので，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $y=\dfrac{1}{2}$ に関して対称である．したがって，直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点は $y=\dfrac{1}{2}$ 上に存在するので，直線 ℓ_1 が $\left(-\dfrac{11}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときの α の値を考えて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}=-\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}\left(-\frac{11}{3}\right)+\frac{1+3\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\\ \iff\ &3\alpha^4-12\alpha^2-44\alpha-3=0\\ \iff\ &(\alpha-3)(3\alpha^3+9\alpha^2+15\alpha+1)=0\end{aligned}$$

$\alpha>1$ のとき，$3\alpha^3+9\alpha^2+15\alpha+1\fallingdotseq 0$ であるので，求める α の値は $\alpha=\mathbf{3}$ である．

このとき，点 $P_1\left(3,\ \dfrac{1}{10}\right)$，点 $P_1\left(3,\ \dfrac{9}{10}\right)$ であるので，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)\cdot\left\{3-\left(-\frac{11}{3}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$



注釈

ℓ_1，ℓ_2 の傾きを考えても対称性に気づけるだろう．

注釈

対称性に気付かなくても，ℓ_1，ℓ_2 の方程式から y を消去した x の方程式を満たす x の値が $-\dfrac{11}{3}$ として代入して α の値を求めてもよい．

講評

［Ｉ］［数と式，集合と論証］(やや易)：特に難しいところはないが，(2) の証明は経験の差が出るだろう。

［Ⅱ］［図形と方程式］（標準）：平易な問題であるが，数値がやや汚いので，計算を工夫して行えるかが勝負を分け目で計算の仕方で差がつくだろう。

［Ⅲ］［数 III 微積分］（やや難）：考え方として難しいところはないが，計算がやや難儀である。まともに計算してもよいが，対称性や $\alpha > 1$ という条件などに注目するとある程度計算の目星もつき，だいぶやりやすくなるだろう。

昨年度に比べて難易度は上がっている。全てを解き切るのが厳しいであろうから得点できるところで計算ミスの内容に進めたい。70% を目指したい。