解答速報

日本大学医学部 N方式（2期）　数学

2024年 3月4日実施

I

(1)　連立不等式 $\begin{cases} \dfrac{x}{6} \geqq \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} \\ |2x+5| < 8 \end{cases}$ を満たす整数 x は全部で $\boxed{\ 1\ }$ 個ある。

(2)　6 個の値からなるデータ 9, 5, 1, 13 , 2 , x の中央値が 6 であるとき，$x = \boxed{\ 2\ }$ であり，このデータの四分位範囲は $x = \boxed{\ 3\ }$ である。

(3)　a, b を実数，i を虚数単位とする。2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解の 1 つが $x = 2 - \sqrt{3}i$ であるとき，$a = \boxed{\ 4\ }\boxed{\ 5\ }$, $b = \boxed{\ 6\ }$ である。

(4)　初項が 3，公比が r の等比数列の初項から第 10 項までの和を S とする。$r = 2$ のとき $S = \boxed{\ 7\ }\boxed{\ 8\ }\boxed{\ 9\ }\boxed{\ 10\ }$ であり，$r = 1$ のとき $S = \boxed{\ 11\ }\boxed{\ 12\ }$ である。

(5)　$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ のとき，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\ 13\ }\boxed{\ 14\ }$ であり，$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\boxed{\ 15\ }}$ である。

解答

(1)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} \geqq \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ① \\ |2x+5| < 8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より

$$x \geqq 3x - 2$$

$$\therefore\ x \leqq 1 \ \cdots\cdots ③$$

であり，②より

$$-8 < 2x + 5 < 8$$

$$\therefore\ -\frac{13}{2} < x < \frac{3}{2} \ \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$-\frac{13}{2} < x \leqq 1$$

これを満たす整数は $x = -6,\ -5,\ -4\ \cdots\cdots,\ 1$ の **8** 個

(2)　中央値が 6 となるのは，データを小さい順に並べたとき

$$1,\ 2,\ 5,\ x,\ 9,\ 13$$

となる場合に限る。このとき

$$\frac{5+x}{2} = 6 \qquad \therefore\ x = \mathbf{7}$$

さらにこのとき，第 1 四分位数は $Q_1=2$，第 3 四分位数は $Q_3=9$ であるから，四分位範囲は

$$Q_3-Q_1=9-2=\mathbf{7}$$

(3)　与えられた方程式は実数係数なので，$x=2-\sqrt{3}i$ が解のとき，$x=2+\sqrt{3}i$ も解である。
したがって，解と係数の関係より

$$\begin{cases} a=-\{(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)\}=\mathbf{-4} \\ b=(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=\mathbf{7} \end{cases}$$

(4)　$r=2$ のとき，初項が 3，公比が 2 の等比数列の初項から第 10 項までの和であるから

$$S=\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=\mathbf{3069}$$

また $r=1$ のとき，初項が 3 の定数数列の初項から第 10 項までの和であるから

$$S=3\times 10=\mathbf{30}$$

である。

(5)　$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2&=3 \\ \left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2&=3 \\ 1+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4&=2 \\ \therefore\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}&=\mathbf{-1} \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2&=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2 \\ &=1-2(-1)+4=7 \end{aligned}$$

より，$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\boldsymbol{\sqrt{7}}$ である。

Ⅱ

　m を実数とする。円 $C : x^2+y^2-6x+2y+6=0$ と直線 $l : y=mx+m+1$ が異なる 2 点 A，B で交わるとき，m のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{16}\,\boxed{17}}{\boxed{18}} < m < \boxed{19}$ である。また，C の中心を C として，△ABC が直角二等辺三角形になるのは $m=\boxed{20}\,\boxed{21}$，$\dfrac{\boxed{22}\,\boxed{23}}{\boxed{24}}$ のときである。

解答

　円 C の方程式は $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ と変形できるので，円 C は中心 $(3,\ -1)$ で半径 2 の円である。
円 C と直線 $l : mx-y+m+1=0$ が相異なる 2 点で交わる条件は，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|4m+2|}{\sqrt{m^2+1}} < 2 \iff |2m+1| < \sqrt{m^2+1}$$

両辺が正の数であることに注意して，2 乗して整理すると

$$m(3m+4) < 0 \iff \boldsymbol{\frac{-4}{3} < m < 0}$$

次に，△ABC が直角二等辺三角形になるのは，CB = CA より，∠ACB = 90° のときである。つまり，点 C と弦 AB の距離が $2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ になるときであるから，点と直線の距離の公式を考えて

$$\frac{|4m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2} \iff |4m+2| = \sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

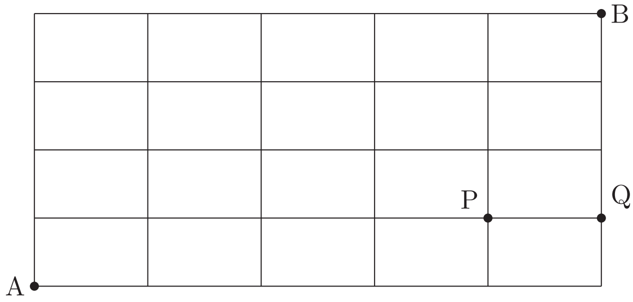
両辺 2 乗して整理すると

$$7m^2+8m+1=0 \iff (7m+1)(m+1)=0$$

$$m = \boldsymbol{-\frac{1}{7},\ -1}$$

III

図のような格子状の道があり，A 地点にいる人が B 地点に向かって最短距離で進む。ただし，2 通りの進み方のある交差点では等確率でいずれかの道を選んで進むものとする。



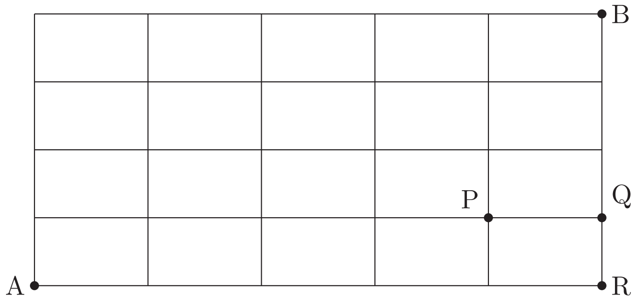
(1)　P 地点を通る確率は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}\ \boxed{27}}$ である。

(2)　Q 地点を通るという条件のもとで，P 地点も通る条件付き確率は $\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である。

解答

(1)　P を通る確率は，5 回の移動のうち，1 回だけ上方向に移動する確率である。1 回だけ上にいく場合の数は ${}_5C_1 = 5$ であるため $\dfrac{5}{2^5} = \boldsymbol{\dfrac{5}{32}}$ である。

(2)　図のように点 R を定める。



Q にいくには P か R のいずれかを経由しなければならない。

P を経由して Q を通る確率は $\dfrac{5}{32} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{64}$ である。

R を通る確率は 5 回の移動で一度も上に行かない確率であるため $\dfrac{1}{32}$ である。R から Q に行く確率は 1 であるため，R を経由して Q を通る確率は $\dfrac{1}{32}$ である。

以上より求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{5}{64}}{\dfrac{5}{64} + \dfrac{1}{32}} = \boldsymbol{\frac{5}{7}}.$$

IV

(1)　関数 $f(x)=2\sin^2 x+\cos x-1\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ であり，最小値は $\boxed{32}\ \boxed{33}$ である。

(2)　関数 $g(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値は $\sqrt{\boxed{34}}$ であり，最小値は $\dfrac{\boxed{35}\sqrt{\boxed{36}}}{\boxed{37}}$ である。

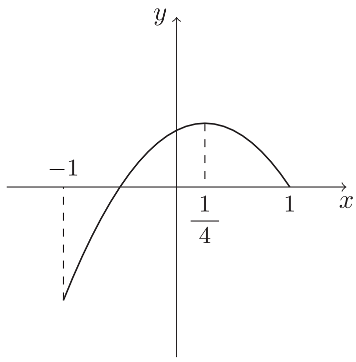
(3)　関数 $h(x)=2\sin x+3\cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値は $\sqrt{\boxed{38}\ \boxed{39}}$ であり，$h(x)$ が $x=\theta$ で最大値をとるとすると，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ である。

解答

(1)　$f(x)=2(1-\cos^2 x)+\cos x-1$ と変形される．$t=\cos x$ とおくと，

$$f(x)=-2t^2+t+1=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

となる．$0 \leqq x \leqq \pi$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ である．$y=-2t^2+t+1$ のグラフは $t=\dfrac{1}{4}$ を軸として上に凸なグラフである．



よって $t=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$，$t=-1$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$ をとる．

(2)　和積の公式より

$$\begin{aligned} g(x)&=\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\\ &=2\sin\frac{x+(x+\frac{\pi}{3})}{2}\cos\frac{x-(x+\frac{\pi}{3})}{2}\\ &=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

である。$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\dfrac{\pi}{6} \leqq x+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{7}{6}\pi$ である．

よって $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとる．また $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$，すなわち $x=\pi$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる．

(3)　三角関数の合成をすることで

$$h(x)=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$$

と変形できる．ただし $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ である．

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\alpha \leqq x+\alpha \leqq \pi+\alpha$ なので $x+\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{13}}$ をとる．

また

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \frac{1}{\tan\theta} \\ &= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}. \end{aligned}$$

V

関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|\log t|dt$ がある。ただし，対数は自然対数とし，$x>0$ とする。

(1) $0<x<\boxed{42}$ のとき $f'(x)=\boxed{43}$ であり，$\boxed{42}<x$ のとき $f'(x)=\boxed{44}$ である。$\boxed{43}$，$\boxed{44}$ に当てはまるものを次の ① ～ ⑧ から 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでも良い。

① $\log x\cdot\log(x+1)$　② $-\log x\cdot\log(x+1)$　③ $\log\dfrac{x+1}{x}$

④ $\log\dfrac{x}{x+1}$　⑤ $\dfrac{\log(x+1)}{\log x}$　⑥ $\dfrac{\log x}{\log(x+1)}$

⑦ $\log x(x+1)$　⑧ $-\log x(x+1)$

(2) $f(x)$ が $x=\alpha$ で最小値をとるとすると，α は $\alpha^2+\alpha-\boxed{45}=0$ を満たす正の数である。

(3) $f(x)$ の最小値は $\log\dfrac{\boxed{46}+\sqrt{\boxed{47}}}{\boxed{48}}+\boxed{49}-\sqrt{\boxed{50}}$ である。

解答

(1) $0<x<\mathbf{1}$ のとき，

$$f(x)=\int_x^1(-\log t)dt+\int_1^{x+1}\log t\,dt$$
$$=\int_1^x\log t\,dt+\int_1^{x+1}\log t\,dt$$

より

$$f'(x)=\log x+\log(x+1)=\log x(x+1)$$

であるため **⑦** である。

$1<x$ のとき

$$f(x)=\int_x^{x+1}\log t dt$$

より

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x=\log\frac{x+1}{x}$$

であるため **③** である。

(2) $1<x$ のとき $\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}>1$ より $f'(x)=\log\dfrac{x+1}{x}>0$ である。

$0<x<1$ のとき，$f'(x)=0$ となるのは $x(x+1)=1$ となるときであるため，α は $\alpha^2+\alpha-\mathbf{1}=0$ を満たす。

(3) (1),(2) より増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

よって $x=\alpha$ のとき最小値をとる。

(2) より $\alpha^2+\alpha-1=0$ を解くと $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。$\alpha>0$ であるため $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。こうして

$$f(\alpha)=\int_1^\alpha\log t\,dt+\int_1^{\alpha+1}\log\ dt$$

$$= \Big[t\log t - t\Big]_1^{\alpha} + \Big[t\log t - t\Big]_1^{\alpha+1}$$
$$= \alpha\log\alpha + (\alpha+1)\log(\alpha+1) - 2\alpha + 1$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}$$
$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{-1} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}$$
$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}$$
$$= \boldsymbol{\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}}.$$

$\boxed{\text{注釈}}$

$\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ に注意したい。

VI

極座標が $(3,\ 0)$ である点を通り，始線に垂直な直線を l_1 とする。極 O を焦点，l_1 を準線とする放物線を C とする。

(1)　放物線 C の極方程式は $r = \dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52} + \cos\theta}$ である。ただし，$r > 0$ とする。

(2)　2 本の直線 l_2 と l_3 が O で垂直に交わり，さらに l_2 と C が 2 点 P，Q で，l_3 と C が 2 点 R，S でそれぞれ交わっている。このとき，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}} + \dfrac{1}{\mathrm{OQ}}$ と $\dfrac{1}{\mathrm{PQ}} + \dfrac{1}{\mathrm{RS}}$ はそれぞれ一定値をとり，

$\dfrac{1}{\mathrm{OP}} + \dfrac{1}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}}$，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}} + \dfrac{1}{\mathrm{RS}} = \dfrac{\boxed{55}}{\boxed{56}}$ である。

解答

(1)　C 上の点 A から l_1 に下した垂線の足を B とおく。このとき $\mathrm{OA} = r$，$\mathrm{AB} = 3 - r\cos\theta$ で，放物線の定義によりこれらは等しいため $r = 3 - r\cos\theta$，整理して $\boldsymbol{r = \dfrac{3}{1+\cos\theta}}$ である。

(2)　P，O，Q は同一直線上にあるため，$\mathrm{P}(r,\ \theta)$ とすると Q の偏角は $\theta + \pi$ であるから，

$\mathrm{OQ} = \dfrac{3}{1+\cos(\theta+\pi)} = \dfrac{3}{1-\cos\theta}$ となる。よって

$$\frac{1}{\mathrm{OP}} + \frac{1}{\mathrm{OQ}} = \frac{1+\cos\theta}{3} + \frac{1-\cos\theta}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}.$$

このとき R，S の偏角はそれぞれ $\theta \pm \dfrac{\pi}{2}$ となるため，OR，OS は $\dfrac{3}{1+\cos\left(\theta \pm \dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{3}{1 \mp \sin\theta}$ となる。

こうして

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ} &= \frac{3}{1+\cos\theta} + \frac{3}{1-\cos\theta} \\
&= \frac{6}{1-\cos^2\theta} \\
\mathrm{RS} &= \frac{3}{1+\sin\theta} + \frac{3}{1-\sin\theta} \\
&= \frac{6}{1-\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{PQ}} + \frac{1}{\mathrm{RS}} &= \frac{1-\cos^2\theta}{6} + \frac{1-\sin^2\theta}{6} \\
&= \frac{2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}}.
\end{aligned}$$

講評

Ⅰ［小問集合］(易)：1 次不等式，データの分析，複素数と方程式，数列，ベクトルからの基本問題の出題である。すべて落とさず得点したい。

Ⅱ［数Ⅱ図形と方程式］（易）：円と直線の位置関係についての問題である。中心と直線の距離を考えればよい。非常に基礎的な問題であるから落とさず得点したい。

Ⅲ［数 A 確率］（易）：最短経路についての確率である。(1) は反復試行、(2) は右端を通る場合に注意して計算すればよい。基本レベルであるので落とさず得点したい。

Ⅳ［数Ⅱ三角関数］（易）：三角関数の最大値・最小値についての問題。(1) は $\cos x$ についての 2 次関数になる。(2) は和積変換すればよいが，加法定理で展開してから合成してもよい。(3) 合成すればよい。どれも落とさず得点したい。

Ⅴ［数Ⅲ面積］（標準）：絶対値のついた積分に関する問題である。図を描くなどして，ミスのないように進めたい。(3) で log を 1 つに纏めることに苦労した受験生がいたと思われる。(2) までは落とさず得点したい。

Ⅵ［数Ⅲ式と曲線］（標準）：極方程式についての問題である。(1) 放物線の定義を思い出せたかで差がついただろう。(2) は (1) を用いれば容易だが、経験により差がついたと思われる。

計算ミスが致命傷になるので検算などをして気をつけよう。1 次突破ボーダーは 75〜80% 程度か。