日本医科大学（後期）　数学

2024年 2月28日実施

［I］

中が見えない袋O，A，Bがある。袋Oの中には赤玉2個，白玉4個が入っており，袋Aと袋Bの中には何も入っていない。1から6の目をもつ大小2つのさいころを同時に1回投げて出た目をそれぞれ a，b とするとき，以下の各操作を（操作1），（操作2），（操作3）の順に1度ずつ行う。

(操作1)　袋Oの中から無作為に a 個の玉を取り出して，袋Aの中に入れる。

(操作2)　袋Oの中から無作為に $\min\{b,\ 6-a\}$ 個の玉を取り出して，袋Bの中に入れる。ただし，2つの実数 x，y のうち大きくない方の値を $\min\{x,\ y\}$ で表わす。また，$\min\{b, 6-a\}=0$ の場合には，袋Oから袋Bへの玉の移動は行わない。

(操作3)　ab が6の倍数である場合に限り，袋Aの中から無作為に1個の玉を取り出して，袋Bの中に入れる。

なお，各操作で取り出した玉はもとに戻さない。以上の操作をすべて終えたとき，袋Aの中に入っている玉の個数を N_{A}，袋Aの中に入っている赤玉の個数を $N_{\mathrm{A,R}}$，袋Bの中に入っている玉の個数を N_{B}，袋Bの中に入っている赤玉の個数を $N_{\mathrm{B,R}}$ とする。以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ に適する1以上の整数を求めよ。ただし，分数は既約分数で表すこと。

問1　$N_{\mathrm{A}}=4$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

問2　$N_{\mathrm{B}}=4$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問3　$N_{\mathrm{A}} \geqq 4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

問4　$N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=1$ という条件の下で，$N_{\mathrm{B,R}}=1$ なる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

解答

問1　$N_{\mathrm{A}}=4$ であるのは

(i)　操作1で4個取り出し，操作3を行わない場合

(ii)　操作1で5個取り出し，操作3を行う場合

のいずれかである。それぞれの確率を計算する。

(i)　操作1で4個取り出し，操作3を行わない場合

$a=4$ のとき，操作3を行わないのは $b \neq 3,\ 6$ のときであるため，確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{36}$ である。

(ii)　操作1で5個取り出し，操作3を行う場合

$a=5$ のとき，操作 3 を行うのは $b=6$ のときであるため，確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

以上より $\dfrac{4}{36}+\dfrac{1}{36}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$ である。

問 2　$N_{\mathrm{B}}=4$ であるのは

(i)　操作 2 で 4 個取り出し，操作 3 を行わない場合

(ii)　操作 2 で 3 個取り出し，操作 3 を行う場合

のいずれかである。それぞれの確率を計算する。

(i)　操作 2 で 4 個取り出し，操作 3 を行わない場合

$\min\{b,\ 6-a\}=4$ であるには $a=1,\ 2$ であることが必要である。

- $a=1$ のとき

  $b=4$ である。よって確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

- $a=2$ のとき

  $b=4,\ 5,\ 6$ であれば操作 2 で 4 個の玉を取り出すことができる。$b=6$ のときは操作 3 を行うことになるため，これを除くと確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{36}$ である。

(ii)　操作 2 で 3 個取り出し，操作 3 を行う場合

$\min\{b,\ 6-a\}=3$ であるには $a=1,\ 2,\ 3$ であることが必要である。

- $a=1$ のとき

  $\min\{b,\ 6-a\}=3$ であるのは $b=3$ のとき，$ab=3$ より操作 3 は行われない。よって確率は 0 である。

- $a=2$ のとき

  $\min\{b,\ 6-a\}=3$ であるのは $b=3$ のとき，$ab=6$ より操作 3 を行う。よって確率は $\dfrac{1}{36}$ である。

- $a=3$ のとき

  $\min\{b,\ 6-a\}=3$ であるのは $b\geqq 3$ のときで，特に ab が 6 の倍数になるのは $b=4,\ 6$ のときである。よって確率は $\dfrac{2}{36}$ である。

以上より $\dfrac{1}{36}+\dfrac{2}{36}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{2}{36}=\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ である。

問 3　次のように場合分けをして，それぞれのときの $N_{\mathrm{A}}\geqq 4,\ N_{\mathrm{A,R}}=2$ である確率を求める。

(i)　$(a,\ b)=(4,\ 1),\ \cdots,\ (4,\ 5)$ のとき

操作 1 で袋 O から 4 個取り出し，そのうち赤玉 2 個を含む確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_4}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$ である。

(ii)　$(a,\ b)=(5,\ 1),\ \cdots,\ (5,\ 5)$ のとき

操作 1 で袋 O から 5 個取り出し，そのうち赤玉 2 個を含む確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_5}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ である。

(iii)　$(a,\ b)=(5,\ 6)$ のとき

操作 1 で袋 O から 5 個取り出し，そのうち赤玉 2 個を含み，さらに操作 3 で袋 A から白玉を取り出す確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$ である。

(iv)　$(a,\ b)=(6,\ 1),\ \cdots,\ (6,\ 6)$ のとき

操作 1 で袋 O から 6 個取り出すため必ず赤玉を含む。よって操作 3 で袋 A から白玉を取り出す確率で $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ である。

以上より求める確率は

$$\frac{4}{36}\times\frac{2}{5}+\frac{5}{36}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{36}\times\frac{2}{5}+\frac{6}{36}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

問 4　$N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=1$ であるのは $(a,\ b)=(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6)$ の確率である。それぞれ

場合分けをして確率を求める。また加えて $N_{\mathrm{B,R}}=1$ である確率も求める。

(i)　$(a,\ b)=(4,\ 1)$ のとき

操作 1 で袋 O から 4 個取り出し，そのうち赤玉 2 個を含む確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_4}=\dfrac{8}{15}$ である。

加えて $N_{\mathrm{B,R}}=1$ である確率は，操作 2 で袋 O に残った 2 個の玉から赤玉を取り出す確率であるため $\dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$(a,\ b)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5)$ のとき

操作 1 で袋 O から 4 個取り出し，そのうち赤玉 2 個を含む確率で $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_4}=\dfrac{8}{15}$ である。

このとき操作 2 で袋 O から残り 2 個の玉をどちらも袋 A に移動させるため，加えて $N_{\mathrm{B,R}}=1$ である確率は $\dfrac{8}{15}$ である。

(iii)　$(a,\ b)=(5,\ 6)$ のとき

操作 1 で赤玉を何個取り出したかで場合分けする。

- 操作 1 で赤玉を 1 個取り出すとき

  操作 3 で白玉を取り出す必要がある。確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4}{{}_6\mathrm{C}_5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}$ である。

  このとき操作 2 で袋 O の残り 1 個の玉を袋 B に移動させるため，加えて $N_{\mathrm{B,R}}=1$ である確率は $\dfrac{4}{15}$ である。
- 操作 1 で赤玉を 2 個取り出すとき

  操作 3 で赤玉を取り出す必要がある。確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{15}$ である。このとき明らかに袋 B に赤玉が 1 個あるため，加えて $N_{\mathrm{B,R}}=1$ である確率は $\dfrac{4}{15}$ である。

こうして $N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=1$ である確率は

$$\frac{1}{36}\times\frac{8}{15}+\frac{3}{36}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{36}\times\left(\frac{8}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{8+24+4+4}{36\times15}=\frac{40}{36\times15}$$

であり，さらに $N_{\mathrm{B,R}}=1$ である確率は

$$\frac{1}{36}\times\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{36}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{36}\times\left(\frac{8}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{4+24+4+4}{36\times15}=\frac{36}{36\times15}$$

である。こうして求めるべき条件付き確率は $\dfrac{\frac{36}{36\times15}}{\frac{40}{36\times15}}=\boldsymbol{\dfrac{9}{10}}$ である。

注釈

下の表は操作後の $(N_{\mathrm{A}},\ N_{\mathrm{B}})$ を並べたものである。操作 3 が発生しないものは操作 2 の後の値，操作 3 が発生するものは 「操作 2 の後の値 $\to$ 操作 3 の後の値」としている。数えにくい問題であるため，表を作って数えるのも手だろう。

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 5) $\to$ (0, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3) $\to$ (1, 4)	(2, 4)	(2, 4)	(2, 4) $\to$ (1, 5)
3	(3, 1)	(3, 2) $\to$ (2, 3)	(3, 3)	(3, 3) $\to$ (2, 4)	(3, 3)	(3, 3) $\to$ (2, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 2) $\to$ (3, 3)	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2) $\to$ (3, 3)
5	(5, 1)	(5, 1)	(5, 1)	(5, 1)	(5, 1)	(5, 1) $\to$ (4, 2)
6	(6, 0) $\to$ (5, 1)	(6, 0) $\to$ (5, 1)	(6, 0) $\to$ (5, 1)	(6, 0) $\to$ (5, 1)	(6, 0) $\to$ (5, 1)	(6, 0) $\to$ (5, 1)

［II］

O を原点とする複素数平面において，O を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円を C_1 とし，C_1 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，複素数平面上の点 $\mathrm{Q}(w)$ を次で定義する。

$$w=\frac{z+i}{z+1}$$

ただし，i を虚数単位とする。また，2 点 P，Q を通る直線を L とおき，L 上の任意の点を $\mathrm{R}(u)$ とおく。このとき，以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ に適する実数を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　点 $\mathrm{P}(z)$ が C_1 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}i$，半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円 C_2 となる。

問 2　$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ のとき，L 上の任意の点 $\mathrm{R}(u)$ は次の直線の方程式を満たす（ただし，複素数 u と共役な複素数を $\overline{u}$ で表す）。

$$\left(\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}i\right)u+\left(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}i\right)\overline{u}=1$$

また，L と問 1 の C_2 の 2 つの交点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ は $\alpha=\boxed{\text{ク}}$，$\beta=\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}i$ で与えられる。

問 3　L が問 2 の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るための必要十分条件は次のように表せる（ただし，0 でない複素数 γ に対して，$\arg\gamma$ は γ の偏角を表す）。

$$\arg\left(\frac{z-\alpha}{z-w}\right)=\boxed{\text{サ}}\ \text{または}\ \boxed{\text{シ}}\quad(\text{ただし},0\leqq\boxed{\text{サ}}<\boxed{\text{シ}}<2\pi)$$

問 4　点 $\mathrm{P}(z)$ が C_1 上を動くとし，かつ L が問 2 の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るとする。これら 2 つの条件を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ は全部で $\boxed{\text{ス}}$ 個あり，$\boxed{\text{ス}}$ 個の複素数 z の中で実部の値が最も大きい複素数は $\boxed{\text{セ}}+\boxed{\text{ソ}}i$ である。

解答

問 1　$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ を z について整理すると

$$\begin{aligned}
&w=\frac{z+i}{z+1}\\
\iff& zw+w=z+i\\
\iff& (w-1)z=-w+i\\
\iff& z=\frac{-w+i}{w-1}
\end{aligned}$$

である。これを $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{-w+i}{w-1}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\iff& |-w+i|^2=\frac{1}{2}|w-1|^2\\
\iff& (-w+i)(-\overline{w}-i)=\frac{1}{2}(w-1)(\overline{w}-1)\\
\iff& |w|^2+(2i+1)w+(-2i+1)\overline{w}+1=0\\
\iff& |w-(1-2i)|^2=4
\end{aligned}$$

であるため，点 Q(w) の軌跡は中心 $\boldsymbol{-1+2i}$，半径 $\mathbf{2}$ の円である。

問 2　$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ のとき

$$\begin{aligned} w &= \frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} \\ &= \frac{-1+3i}{1+i} \\ &= \frac{(-1+3i)(1-i)}{2} \\ &= 1+2i \end{aligned}$$

である。

xy 平面上で考えると L は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$(1,\ 2)$ を通る直線であるため

$$y=\frac{2-\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})}(x-1)+2=x+1$$

である。$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ は L 上にあり，傾きは 1 であるため，L は $(0,\ 0)$，$(-1,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。複素数平面上で考えると L は 0，$-1-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。よって，L 上の任意の点 R(u) は次の直線の方程式を満たす。

$$\begin{aligned} & |u-(-1+i)|=|u| \\ \iff & (u+1-i)(\overline{u}+1+i)=|u|^2 \\ \iff & (1+i)u+(1-i)\overline{u}=-2 \\ \iff & \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)u+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\overline{u}=1} \end{aligned}$$

xy 平面上で C_1 は $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ と表される。

$$\begin{cases} y=x+1 & \cdots① \\ (x+1)^2+(y-2)^2=4 & \cdots② \end{cases}$$

を解く。① を ② に代入すると $(x+1)^2+(x-1)^2=4$ であり，整理すると $x^2=1$ であるため $x=\pm1$ である。それぞれ ① に代入することで $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-1,\ 0)$ が解である。

以上より $\boldsymbol{\alpha=-1}$，$\boldsymbol{\beta=1+2i}$ である。

別解

複素数のまま考えてもよい。u，z，w は同一直線上にあるため $\dfrac{u-z}{w-z}$ は実数である。

実数条件 $\dfrac{u-z}{w-z}=\overline{\dfrac{u-z}{w-z}}$ を整理すると

$$\begin{aligned} & (\overline{w}-\overline{z})(u-z)=(\overline{u}-\overline{z})(w-z) \\ \iff & (\overline{w}-\overline{z})u+(z-w)\overline{u}=z\overline{w}-\overline{z}w \end{aligned}$$

これに $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$w=1+2i$ を代入すると

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)u+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)\overline{u}=3i$$

辺々を $3i$ で割って

$$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)u+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\overline{u}=1}$$

問 3　点 $z,\ w,\ \alpha$ が同一直線上にあるのは $\dfrac{z-\alpha}{z-w}$ が実数のときであるため，$\arg\left(\dfrac{z-\alpha}{z-w}\right)=\boldsymbol{0,\ \pi}$ である。

問 4　$\dfrac{z-\alpha}{z-w}=\dfrac{z+1}{z-\dfrac{z+i}{z+1}}=\dfrac{(z+1)^2}{z^2-i}$ となる。これは実数になるため

$$\frac{(z+1)^2}{z^2-i}=\overline{\frac{(z+1)^2}{z^2-i}}=\frac{\left(\overline{z}+1\right)^2}{\overline{z^2}+i}$$

を満たす。$|z|^2=\dfrac{1}{2}$ に注意すると $\overline{z}=\dfrac{1}{2z}$ より

$$\begin{aligned}\frac{(\overline{z}+1)^2}{\overline{z}^2+i}&=\frac{\left(\dfrac{1}{2z}+1\right)^2}{\dfrac{1}{4z^2}+i}\\&=\frac{\dfrac{1}{4z^2}(1+2z)^2}{\dfrac{1}{4z^2}+i}\\&=\frac{(1+2z)^2}{1+4iz^2}\end{aligned}$$

となるため,

$$\frac{(z+1)^2}{z^2-i}=\frac{(1+2z)^2}{1+4iz^2}$$

が成立する。式を整理すると

$$\begin{aligned}&(1+4iz^2)(z+1)^2=(z^2-i)(1+2z)^2\\\iff&4iz^4+8iz^3+4iz^2+z^2+2z+1\\&\quad=4z^4+4z^3+z^2-4iz^2-4iz-i\\\iff&(4-4i)z^4+(4-8i)z^3-8iz^2-(2+4i)z-1-i=0\quad\cdots③\end{aligned}$$

$\mathrm{A}(\alpha)$ は問 2 の L 上にあるため，③ は $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を解に持つ。

また，$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ に対して w を計算すると

$$w=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{i-1}{1-i}=-1$$

であるため，$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ のときの L も $\mathrm{A}(\alpha)$ を通ることから ③ は $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ を解に持つ。

よって ③ の左辺は

$$2\left(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2z^2+2z+1$$

で割り切れる。

実際に割ると，その商は $(2-2i)z^2-2iz-1-i$ であるため,

$$(2-2i)z^2-2iz-1-i=0\quad\cdots④$$

の解を求めると残りの条件を満たす点が得られる。
z の実部と虚部をそれぞれ $x,\ y$ として ④ に $z=x+yi$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&(2-2i)(x+yi)^2-2i(x+yi)-1-i=0 \\
\Longleftrightarrow\ &2x^2-2y^2+4xy+2y-1+i(-2x^2+2y^2+4xy-2x-1)=0
\end{aligned}
$$

となるため，連立方程式

$$
\begin{cases}
2x^2-2y^2+4xy+2y-1=0 & \cdots ⑤ \\
-2x^2+2y^2+4xy-2x-1=0 & \cdots ⑥
\end{cases}
$$

の実数解を求めるとよい。
$\dfrac{⑤+⑥}{2}$，$\dfrac{⑤-⑥}{2}$ をすることで

$$
\begin{cases}
4xy-x+y-1=0 & \cdots ⑦ \\
2x^2-2y^2+x+y=0 & \cdots ⑧
\end{cases}
$$

⑧ を整理すると $(2x-2y+1)(x+y)=0$ より $y=-x$ または $y=x+\dfrac{1}{2}$ となる。
$y=-x$ を ⑦ に代入すると $-4x^2-2x-1$ となるが判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=1-4=-3<0$ より実数解を持たず不適。
$y=x+\dfrac{1}{2}$ を ⑦ に代入すると

$$
\begin{aligned}
&4x\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)-x-1=0 \\
\Longleftrightarrow\ &4x^2+2x-1=0
\end{aligned}
$$

である。これを解くと $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$ である。この 2 解はどちらも実数であるため，y も実数として得られる。また異なる実数であるため，④ は異なる 2 つの解を持つことが分かる。こうして ③ は異なる 4 つの複素数解を持つため，条件を満たす複素数は **4 個** 存在する。
また 4 個の複素数の実部は $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{4}$，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$ であるため，実部が最大の複素数は

$$
\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\right)i=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{4}}
$$

である。

注釈

高等学校学習指導要領外であるが ④ で解の公式を用いてもよい。複素数係数の 2 次方程式が実数係数のときと同様であることは，同じように平方完成すれば証明ができる。なお，計算の際は $i=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2$ を用いるとよい。

注釈

$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおいて $\dfrac{(z+1)^2}{z^2-i}$ の虚部 $=0$ を考えても計算できる。

注釈

一次分数変換の式を $(z+1)(w-1)=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と変形して，図形的意味を考えて解くこともできるものの，早々に気付くものではないだろう。

[III]

平面上の 3 点 O，A，B を，OA $=$ OB $= 1$，かつ $0 < \angle\mathrm{AOB} < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすようにとる。$\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とおく。点 P_1 を点 A とする。P_1 より直線 OB に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を下ろし，Q_1 より直線 OA に垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ を下ろし，以下同様にして，点 P_1，P_2，$\mathrm{P}_3, \cdots$ を直線 OA 上に，点 Q_1，Q_2，$\mathrm{Q}_3, \cdots$ を直線 OB 上に，それぞれとる。また，三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$ $(k = 1,\ 2, \cdots)$ の面積を S_k とする。正の実数 p，q に対して，関数 $A_p(\theta)$，$B_q(\theta)$，および，$C(\theta)$ を次で定める。

$$A_p(\theta) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^p + (\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1})^p\right\}\right)^{\frac{1}{p}},\quad B_q(\theta) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^q\right\}^{\frac{1}{q}},\quad C(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$$

以下の各問いに答えよ。ただし，平面上の相異なる 2 点X，Yに対して，XYは線分XYの長さを表す。

問 1　$A_p(\theta)$ を θ，p を用いて表せ。答えのみでよい。

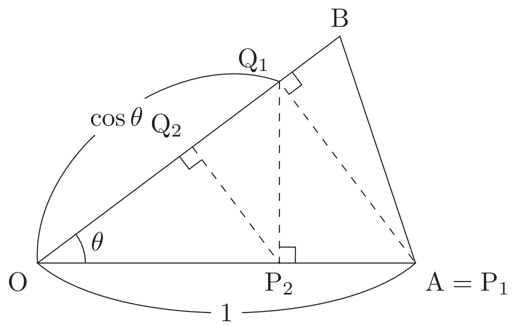
問 2　$B_q(\theta)$ を θ，q を用いて表せ。答えのみでよい。

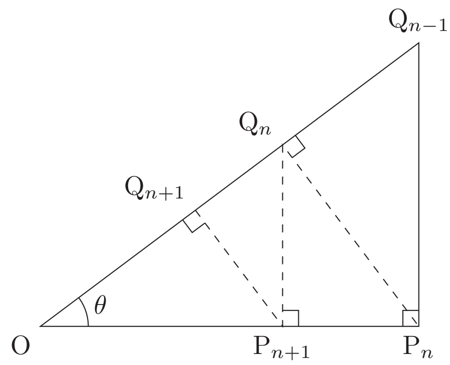
問 3　$C(\theta)$ を θ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　次の極限が存在し，かつその極限値が正となるための p に対する必要十分条件を求めよ。また，そのときの極限値も答えること。ただし，記号 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}$ は $\theta > 0$ の範囲で θ を 0 に限りなく近づけたときも極限を意味する。

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}$$

解答





図より

$$\begin{cases} \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{OP}_{n+1}\sin\theta \\ \mathrm{OP}_{n+1} = \mathrm{OQ}_n\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}{\mathrm{OQ}_n} = \tan\theta \end{cases}$$

により $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n \times \dfrac{1}{\tan\theta} \times \cos\theta \times \sin\theta = \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n \times \cos^2\theta$ である。$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = \sin\theta$ より $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \sin\theta\cos^{2(n-1)}\theta$ である。

$\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ においても同様に $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{P}_n \times \cos^{2(n-1)}\theta$ で，$\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2 = \sin\theta\cos\theta$ より $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1} = \sin\theta\cos^{(2n-1)}\theta$ である。

問 1

$$\begin{aligned}
A_p(\theta) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\{(\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k)^p + (\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1})^p\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\{\sin^p\theta\cos^{2(k-1)p}\theta + \sin^p\theta\cos^{(2k-1)p}\theta\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sin^p\theta(1+\cos^p\theta)\cos^{2(k-1)p}\theta\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $|\cos^{2p}\theta| < 1$ であるため

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sin^p\theta(1+\cos^p\theta)\cos^{2(k-1)p}\theta\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\frac{\sin^p\theta(1+\cos^p\theta)}{1-\cos^{2p}\theta}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned}$$

問 2　問 1 と同様にして

$$\begin{aligned}
B_q(\theta) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sin^q\cos^{2(k-1)q}\theta\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{\sin^q\theta}{1-\cos^{2q}\theta}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sin\theta}{(1-\cos^{2q}\theta)^{\frac{1}{q}}}}
\end{aligned}$$

問 3　図より

$$\begin{aligned}
S_n &= \triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n \\
&= \frac{1}{2}\times\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\times\mathrm{OQ}_n \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\times\frac{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}{\tan\theta} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\sin^2\theta\cos^{4(n-1)}\theta \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos^4\theta)^{n-1}
\end{aligned}$$

よって

$$C(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}S_k = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\frac{1}{1-\cos^4\theta} = \boldsymbol{\frac{\cos\theta}{2\sin\theta(1+\cos^2\theta)}}$$

別解

$\mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$ と $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ は相似比は $\cos^{2(n-1)}\theta$ となるため

$$S_n = S_n\times\cos^{4(n-1)}\theta = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\times\cos^{4(n-1)}\theta$$

としてもよい。

問 4

$$\begin{aligned}
\frac{A_p(\theta)B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)} &= \frac{\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}\cdot\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{2}{p}}}}{\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta(1+\cos^2\theta)}} \\
&= 2\cdot\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}\cdot\sin^3\theta\cdot\frac{1}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}} \\
&= 2\cdot\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{\theta^3}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}} \\
&= 2\cdot\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\left(\frac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{3}{p}}
\end{aligned}$$

となる。$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}=2$ であるため $\dfrac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}$ の収束性について考えればよい。

$p=2$ のときは $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{\sin^2\theta}=1$ より $\dfrac{A_p(\theta)B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}$ は正の実数値 4 に収束する。

$p>2$ のときは

$$0<\frac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}<\frac{\theta^p}{1-\cos^2\theta}=\frac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}$$

であり $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^p}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}=1\cdot 0=0$ より，はさみうちの原理から 0 に収束する。

$p<2$ のときは

$$\frac{\theta^p}{1-\cos^p\theta}>\frac{\theta^p}{1-\cos^2\theta}=\frac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}$$

であり $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{1-\cos^2\theta}\cdot\theta^{p-2}=\infty$ より，追い出しの原理から発散する。

以上より $p=\mathbf{2}$ で収束し，その極限値は $\mathbf{4}$ である。

[IV]

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とするとき

$$I_n(m)=\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}dx\right)$$

と定め,

$$L_m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left\{\frac{I_{mn}(m)}{I_n(m)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

と定める。このとき, 以下の各問いに従って，極限 $I_n(m)$ が存在することを示し，また極限値 $I_n(m)$ と L_m を求めることを考える。

問 1　x を正の実数とするとき，0 以上の全ての整数 N に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$e^x>\frac{x^N}{N!}$$

問 2　以下の (1) ～ (3) に答えよ。

(1)　極限 $I_0(m)$ を m を用いて表せ。答えのみでよい。

(2)　極限 $I_n(m)$ の存在を仮定して，極限 $I_{n+1}(m)$ が存在することを示し，$I_n(m)$ を用いて $I_{n+1}(m)$ を表せ。

(3)　極限 $I_n(m)$ の存在を示し，$I_n(m)$ を $n,\ m$ を用いて具体的に表せ。

問 3　$m\geqq 2$ のとき，極限 L_m を m を用いて表せ。

解答

問 1　数学的帰納法を用いて証明する。

i）　$N=0$ のとき

$x>0$ のとき，$e^x>\dfrac{x^0}{0!}=1$ より，題意は成立する。

ii）　$N=k$ (k は 0 以上の整数) のとき

$x>0$ のとき，$e^x>\dfrac{x^k}{k!}$ が成立すると仮定する。

$g_{k+1}(x)=e^x-\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ とおくと，$x>0$ のとき，$g'_{k+1}(x)=e^x-\dfrac{x^k}{k!}>0$ ($\because$ 仮定) であるから，$g_{k+1}(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

したがって，$g_{k+1}(x)>g_{k+1}(0)=1>0$ より，題意は成立する。

よって，$x>0$ のとき，0 以上の全ての整数 N に対して $e^x>\dfrac{x^N}{N!}$ が示された。

問 2 (1)

$$\begin{aligned}I_0(M)&=\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{m-1}e^{-x^m}\right)dx\\&=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{m}\int_0^M(-x^m)'e^{-x^m}\right)dx\\&=\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{m}e^{-x^m}\right]_0^M\\&=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{m}e^{-M^m}+\frac{1}{m}\right)\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{m}}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^M x^{m(n+1)+m-1}e^{-x^m}dx &= \int_0^M x^{mn+m}x^{m-1}e^{-x^m}dx \\
&= \left[x^{mn+m}\left(-\frac{e^{-x^m}}{m}\right)\right]_0^M + \frac{mn+m}{m}\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}dx \\
&= -\frac{M^{mn+m}}{me^{x^M}} + (n+1)\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}dx
\end{aligned}$$

となる。ここで $I_n(m)$ の存在を仮定すると

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{m(n+1)+m-1}e^{-x^m}dx &= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{M^{mn+m}}{me^{M^m}} + (n+1)\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}dx\right) \\
&= 0 + (n+1)I_n(m) \quad \text{(途中，問 1 からはさみうちの原理を用いた，略)}
\end{aligned}$$

となるため，$I_{n+1}(m)$ は存在し，$\boldsymbol{I_{n+1}(m) = (n+1)I_n(m)}$ となる。

(3)　数学的帰納法で示す。

$n=0$ のとき，(1) より $I_n(m)$ が存在する。

$n=k$ のとき存在を仮定すると (2) より $I_{k+1}(m)$ が存在する。

以上より任意の非負整数 n に対して $I_n(m)$ が存在する。

値は

$$\begin{aligned}
I_n(m) &= nI_{n-1}(m) \\
&= \cdots \\
&= n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 1\cdot I_0(m) \\
&= \boldsymbol{\frac{n!}{m}}
\end{aligned}$$

別解

得られた漸化式を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{I_{n+1}(m)}{(n+1)!} = \dfrac{I_n(m)}{n!}$ であるため

$$I_n(m) = n!\cdot\frac{I_n(m)}{n!} = n!\cdot\frac{I_0(m)}{0!} = \boldsymbol{\frac{n!}{m}}$$

問 3　問 2 (3) の結果を代入すると

$$L_m = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left\{\frac{I_{mn}(m)}{I_n(m)}\right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}\left(\frac{(mn)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

である。$L_m(n) = \dfrac{1}{n^{m-1}}\left(\dfrac{(mn)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおき，$L_m(n) > 0$ より自然対数をとると

$$\begin{aligned}
\log L_m(n) &= \log\frac{1}{n^{m-1}}\left(\frac{(mn)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log k - (m-1)\log n
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}(\log k - \log n)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log\frac{k}{n}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log L_m(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log\frac{k}{n}\\ &= \int_1^m \log x dx\\ &= \Big[x\log x - x\Big]_1^m\\ &= m\log m - m + 1\end{aligned}$$

である。こうして $L_m = e^{m\log m - m+1} = \boldsymbol{e^{1-m}m^m}$ となる。

講評

［I］［確率］（標準）：条件がやや複雑な確率な問題であった。問題文が長いので読み違いに注意して正確に事象を把握できたかが問われた。

［II］［複素数平面］（やや難）：一次分数変換に関する問題であった。やや計算に難儀する部分も多いだろう。問 3 まで得点できれば十分だろう。

［III］［三角比，極限］（標準）：図形と極限の融合問題であった。図形は基本的なものであるので，複雑な式の計算を丁寧に行いたい。

［IV］［積分法］（標準）：部分積分を用いた漸化式の立式に関する問題であった。一見すると計算に難儀しそうであるが計算してみると案外計算しやすい。部分積分を丁寧にやりたい。

昨年度に比べて計算量が増し，計算ができるか否かが問われた形だ。落ち着いて計算を進めることはなかなか難しいだろう。普段から難しい計算に取り組んでないと本番で対応するのはとても無理ではないか。ただ難しい考え方を要する問題はないので時間内に計算できる問題をかき集めて得点していきたい。一次突破ラインは 50% 程度か。