日本大学医学部 N方式(1期)　数学

2024年 2月1日実施

I

(1)　円に内接する四角形 ABCD において，AB $=3$，BC $=4$，CD $=3$，DA $=2$ とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}}$ であり，BD $=\sqrt{\boxed{4}\boxed{5}}$ である。

(2)　t を実数とする。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ を満たすベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{6}\boxed{7}$ であり，$|t\vec{a}+\vec{b}|$ は $t=\dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}}$ のとき最小値をとる。

(3)　a，b を実数とする。2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが直線 $x=2$ に関して対称で，頂点が直線 $y=3x-1$ 上にあるとき，$a=\boxed{10}\boxed{11}$，$b=\boxed{12}$ である。

(4)　直線 $y=4$ に接し，原点を通る円を考える。この円の中心 P の軌跡の方程式は，

$y=\dfrac{\boxed{13}\boxed{14}}{\boxed{15}}x^2+\boxed{16}$ である。

(5)　i を虚数単位とする。$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}=\dfrac{\boxed{17}\boxed{18}}{\boxed{19}\boxed{20}}$ である。

解答

(1)　余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{BAD}\\&=13-12\cos\angle\mathrm{BAD}\\\mathrm{BD}^2&=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}\\&=25-24\cos\angle\mathrm{BCD}\end{aligned}$$

となる。ABCD は円に内接するため $\angle\mathrm{BCD}=\pi-\angle\mathrm{BAD}$ である。よって

$$13-12\cos\angle\mathrm{BAD}=25+24\cos\angle\mathrm{BAD}$$

となる。これを解いて $\cos\angle\mathrm{BAD}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

また

$$\mathrm{BD}=\sqrt{13-12\cos\angle\mathrm{BAD}}=\sqrt{13+4}=\boldsymbol{\sqrt{17}}$$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ の辺々を二乗すると

$$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$$

ここに $|\overrightarrow{a}|=2,\ |\overrightarrow{b}|=3$ を代入して整理すると $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\mathbf{-5}$ である。

$$\begin{aligned}|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2&=4t^2-10t+9\\&=4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{11}{4}\end{aligned}$$

より $t=\boldsymbol{\frac{5}{4}}$ で最小値をとる。

(3)　関数の式を変形すると $x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$ より軸は $-\frac{a}{2}$ となる。$x=2$ に関して対称であるため，軸は $-\frac{a}{2}=2$ である。よって $a=\mathbf{-4}$ である。
このとき $x^2-4x+b=(x-2)^2+b-4$ より頂点は $(2,\ b-4)$ である。これは $y=3x-1$ 上にあるため，代入して整理することで $b=\mathbf{9}$ となる。

(4)　円の中心の座標を $(a,\ b)$ とおく。
円は原点を通るため，半径は $\sqrt{a^2+b^2}$ で与えられる。一方，$y=4$ と接するため，$y=4$ と $(a,\ b)$ の距離は半径と等しい。点と直線の距離の公式から

$$\frac{|b-4|}{\sqrt{1}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

となる。辺々二乗すると $b^2-8b+16=a^2+b^2$ である。これを整理することで軌跡の方程式は $\boldsymbol{y=-\frac{1}{8}x^2+2}$ となる。

(5)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ であるため，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}&=\frac{\sqrt{2}^{12}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)}{2^{12}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}\\&=-\boldsymbol{\frac{1}{64}}\end{aligned}$$

Ⅱ

$f(x)=4^x-5\cdot 2^{x+2}+64$ について考える。

(1)　不等式 $f(x)\leqq 0$ の解は，$\boxed{\ 21\ }\leqq x\leqq\boxed{\ 22\ }$ である。

(2)　$f(x)$ は，$x=\boxed{\ 23\ }+\log_2\boxed{\ 24\ }$ のとき最小値 $\boxed{\ 25\ }\boxed{\ 26\ }\boxed{\ 27\ }$ をとる。

解答

(1)　$t=2^x$ とおくと $f(x)$ は $t^2-20t+64$ と表される。$t^2-20t+64=(t-4)(t-16)$ より $t^2-20t+64\leqq 0$ は $4\leqq t\leqq 16$ となる。このとき，t の値域は $t\geqq 0$ である。$4\leqq 2^x\leqq 16$ を解くことで $\boldsymbol{2\leqq x\leqq 4}$ を得る。

(2)　$t^2-20t+64=(t-10)^2-36$ と表されるため，$t=10$ のとき，$t^2-20t+36$ は最小値 -36 をとる。$10\geqq 0$ より，これは $f(x)$ の最小値になる。

$10=2^x$ を解くと $x=\log_2 10=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5$ となる。こうして $x=\boldsymbol{1+\log_2 5}$ のとき，$f(x)$ は最小値 $\boldsymbol{-36}$ をとる。

III

座標平面上の 3 点 $(2,\ 5)$, $(0,\ -1)$, $(-2,\ 1)$ を通る円 C について考える。

(1) 円 C の方程式は，$x^2+y^2-\boxed{28}x-\boxed{29}y-\boxed{30}=0$ である。

(2) 点 $(-1,\ 6)$ から円 C に引いた接線のうち，傾きが最大であるものを l とする。 l の方程式は，$y=\boxed{31}x+\boxed{32}$ である。

(3) 円 C と（2）で求めた接線 l との接点の座標は $(\boxed{33}\boxed{34},\ \boxed{35})$ である。

解答

(1) A $(2,\ 5)$，B $(0,\ -1)$，C $(-2,\ 1)$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より AC と BC は直交する。よって AB は円の直径となる。
中心は直径の中点であるため，$(1,\ 2)$ となる。また，$\mathrm{AB}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$ より半径は $\sqrt{10}$ である。こうして円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=10$$

である。これを展開することで求める式は $\boldsymbol{x^2+y^2-2x-4y-5=0}$ となる。

(2) 接線の傾きを m とおくと，式は $y=m(x+1)+6=mx+m+6$ となる。接線と中心の距離は半径と等しいため，点と直線の距離の公式から

$$\frac{|m-2+m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

である。整理すると $|2m+4|=\sqrt{10(m^2+1)}$，辺々を二乗して整理すると $6m^2-16m-6=0$ である。これを解くと $m=3,\ -\dfrac{1}{3}$ である。よって，傾きが最大となるのは $m=3$ のときで直線の方程式は $\boldsymbol{y=3x+9}$ である。

(3) 接点は中心を通り l と直交する直線上にある。この直線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ であるため, 式は $y=-\dfrac{1}{3}(x-1)+2=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$ である。よって

$$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}\\ y=3x+9\end{cases}$$

を解くと，$x=-2,\ y=3$ であるため接点は $\boldsymbol{(-2,\ 3)}$ となる。

Ⅳ

袋の中に白球が 3 個，赤球が 2 個入っている。この袋から 2 個の球を取り出し，色を確認して袋に戻すという試行を繰り返し行う。取り出した 2 個の球の色が同じとき 2 点，取り出した 2 個の球の色が異なるとき 1 点を得るとする。

(1)　この試行を 1 回行ったとき，得点が 2 点である確率は $\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}}$ である。

(2)　この試行を 3 回繰り返したとき，得点の合計が 5 点である確率は $\dfrac{\boxed{38}\,\boxed{39}}{\boxed{40}\,\boxed{41}\,\boxed{42}}$ である。

(3)　この試行を 7 回繰り返したとき，得点の合計が 11 点であった。この条件のもとで，3 回目までの得点の合計が 5 点である条件つき確率は $\dfrac{\boxed{43}\,\boxed{44}}{\boxed{45}\,\boxed{46}}$ である。

解答

(1)　1 回の試行で得点が 2 点となるのは，1 回の試行で同じ色の玉を取り出すときであるため，

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}=\boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

(2)　異なる色の玉を取り出す確率は，余事象を考えると，$\dfrac{3}{5}$ である。

2 点をとる回数を x とすると，合計 5 点となることから $2x+1\cdot(3-x)=5$ となる。これを解くと $x=2$ である。よって求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{36}{125}}$$

(3)　2 点をとる回数を x とすると，合計 11 点となることから $2x+1\cdot(7-x)=11$ となる。これを解くと $x=4$ である。よって，合計 11 点をとる確率は

$${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

で与えられる。特に 3 回目までの得点の合計が 5 点であるとき，残りの 4 回では 2 回同じ色の玉を取り出し，他の 2 回は異なる色を取り出す。よって求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{36}{125}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}{{}_7\mathrm{C}_4\left(\dfrac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^3}=\boldsymbol{\frac{18}{35}}$$

V

数列 $\{a_n\}$ は初項が a であり，階差数列が初項 3，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

(1) $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = a + \boxed{47} - \boxed{48} \cdot \left(\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}}\right)^{n-1}$ である。

(2) $\{a_n\}$ が等比数列であるとき，$a = \boxed{51}\,\boxed{52}$ である。

このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \sqrt{|a_k|} = \frac{\boxed{53}\,\boxed{54}\sqrt{\boxed{55}}\left(\boxed{56} + \sqrt{\boxed{57}}\right)}{\boxed{58}}$ である。

解答

(1) $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおく。条件より $b_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる。よって $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= a + 3\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= a + 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \boldsymbol{a + 6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

である。これは $n = 1$ のときも含む。

(2) $a + 6 = 0$ であればよいため，$a = \mathbf{-6}$ である。

このとき $\sqrt{|a_k|} = \sqrt{6 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}} = \sqrt{6} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}$ である。よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{8} \sqrt{|a_k|} &= \sqrt{6} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(1 - \frac{1}{16}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})}{8}}
\end{aligned}
$$

VI

a を実数とする。座標平面上の曲線 $C: y=\sqrt{x-3}+1$ と直線 $l: y=ax$ について考える。

(1)　曲線 C 上で x 座標が 4 である点を A とすると，点 A における曲線 C の接線の傾きは $\dfrac{\boxed{59}}{\boxed{60}}$ である。また，曲線 C と直線 l が共有点を 2 つもつような a のとりうる値の範囲は

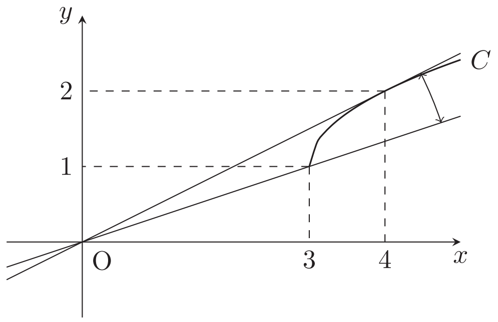
$\dfrac{\boxed{61}}{\boxed{62}} \leqq a < \dfrac{\boxed{63}}{\boxed{64}}$ である。

(2)　$a=\dfrac{\boxed{61}}{\boxed{62}}$ のとき，曲線 C と直線 l で囲まれた図形を D とすると，D の面積は $\dfrac{\boxed{65}}{\boxed{66}}$ である。また，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{67}\,\boxed{68}\,\boxed{69}}{\boxed{70}}\pi$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$ であるため，$x=4$ のときの接線の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{4-3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

この接線は $y=\dfrac{1}{2}(x-4)+2=\dfrac{1}{2}x$ であるため，原点を通る。下図より共有点を 2 つもつのは傾きが $\dfrac{1}{2}$ より小さいときである。また，(3, 1) と交わるときよりも傾きは大きくなる。よって $\boldsymbol{\dfrac{1}{3} \leqq a < \dfrac{1}{2}}$



(2)　曲線 C と直線 l の交点を求める。

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-3}+1=\frac{1}{3}x \\
\iff\ & 9(x-3)=x^2-6x+9 \\
\iff\ & x^2-15x+36=0 \\
\iff\ & (x-3)(x-12)=0
\end{aligned}$$

より $x=3,\ 12$ で交わる。ゆえに D の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_3^{12}\left(\sqrt{x-3}+1-\frac{1}{3}x\right)dx \\
&= \int_3^{12}\left[\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}+x-\frac{1}{6}x^2\right]_3^{12} \\
&= 18+12-24-\left(0+3-\frac{3}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

回転体の体積を V とおく。曲線 C と直線 l の式を x について解くと，それぞれ

$$C: x=(y-1)^2+3$$

$$l : x = 3y$$

である。また，交点の y 座標はそれぞれ 1，4 である。ゆえに回転体の体積は

$$\begin{aligned}
&\pi\int_1^4\left\{9y^2-\left\{(y-1)^2+3\right\}^2\right\}dy\\
&=\pi\int_1^4\left\{9y^2-(y-1)^4-6(y-1)^2-9\right\}dy\\
&=\pi\Big[3y^3-\frac{1}{5}(y-1)^5-2(y-1)^3-9(y-1)\Big]_1^4\\
&=\pi\left(192-\frac{243}{5}-54-27-3\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{297}{5}\pi}
\end{aligned}$$

別解

D は二次関数と直線で囲まれた図形と考えることもできるため，

$$\begin{aligned}
S&=\int_1^4(4-y)(y-1)dy\\
&=\frac{1}{6}(4-1)^3\\
&=\boldsymbol{\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

と解いてもよい。

別解

バームクーヘン積分を用いると

$$V=2\pi\int_3^{12}x\left(\sqrt{x-3}+1-\frac{1}{3}x\right)dx$$

と立式できる。

$$\begin{aligned}
\int_3^{12}x\sqrt{x-3}dx&=\int_3^{12}\{(x-3)\sqrt{x-3}+3\sqrt{x-3}\}dx\\
&=\left[\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_3^{12}\\
&=\frac{2}{5}\cdot3^5+2\cdot3^3\\
&=\frac{756}{5}
\end{aligned}$$

である。一方

$$\begin{aligned}
\int_3^{12}\left(x-\frac{1}{3}x^2\right)dx&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x^3\right]_3^{12}\\
&=\frac{1}{2}\cdot12^2-\frac{1}{9}\cdot12^3-\frac{1}{2}\cdot3^2+\frac{1}{9}\cdot3^3\\
&=-\frac{243}{2}
\end{aligned}$$

となる。こうして $V=2\pi\left(\frac{756}{5}-\frac{243}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{297}{5}\pi}$ となる。

$\boxed{\text{注釈}}$

円錐台から余分な部分を引く方法で計算してもよい。

$$V = \frac{\pi}{3}(12^2 \times 4 - 3^2 \times 1) - \int_1^4 \pi y^2 dy = \frac{297}{5}\pi$$

講評

Ⅰ［小問集合］(易)：三角比，ベクトル，2 次関数，図形と方程式，複素数からの基本問題の出題である。すべて落とさず得点したい。

Ⅱ［指数関数］（易）：非常に基礎的な問題であるから落とさず得点したい。

Ⅲ［図形と方程式］（易）：(2) の計算で行き詰まった人もいるかもしれないが基本レベルであるので落とさず得点したい。

Ⅳ［確率］（易）：反復試行と条件付き確率の基本問題である。落とさず得点したい。

Ⅴ［数列］（易）：階差数列，等比数列の基本問題である。落とさず得点したい。

Ⅵ［数Ⅲ微積分］（標準）：無理関数と 1 次関数で囲まれる部分の面積，回転体の体積を求める問題である。体積の計算は少し計算が汚くなりやすいので差がついたと思われる。

全体的に去年より易しくなったと思われる。差がつきやすいのも体積の計算だけであとはどれも基本的な問題であるから計算ミスが致命傷になるので検算などをして気をつけよう。1 次突破ボーダーは他の科目にもよるが 80〜85% 程度か。