解答速報

順天堂大学医学部　数学

2024年 2月3日実施

Ⅰ　$\boxed{}$に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の$\boxed{}$がある場合は同一の値が入る。

(1) (a)　$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ とすると，

$A+B=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$，$A-B=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\log\boxed{オ}$ である。したがって，

$A=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi+\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\log\boxed{コ}$，

$B=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\log\boxed{コ}$ である。

(b)　$C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+3}{2\sin x+3\cos x+13}dx$，$D=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+2}{2\sin x+3\cos x+13}dx$ とすると，

$C=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}\pi+\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}\log\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$，

$D=\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}\pi-\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノハ}}\log\dfrac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘホ}}$ である。

解答

(1) (a)　$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$A\pm B$ を計算すると

$$\begin{aligned}A+B&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\ \cdots\cdots①\\A-B&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx\\&=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\log\sqrt{2}-\log 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

$(①+②)\div 2$，$(①-②)\div 2$ より，

$$A=\boldsymbol{\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\log 2}$$

$$B=\boldsymbol{\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}\log 2}$$

(b) $C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+3}{2\sin x+3\cos x+13}dx$, $D=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+2}{2\sin x+3\cos x+13}dx$

$3C+2D$ を計算すると，

$$\begin{aligned}3C+2D&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x+2\sin x+13}{2\sin x+3\cos x+13}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

$2C-3D$ を計算すると，

$$\begin{aligned}2C-3D&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x+13}dx\\&=\Big[\log|2\sin x+3\cos x+13|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\log 15-\log 16=\log\frac{15}{16}\quad\cdots\cdots④\end{aligned}$$

③と④を連立して解くと，

$$C=\boldsymbol{\frac{3}{26}\pi+\frac{2}{13}\log\frac{15}{16}}$$
$$D=\boldsymbol{\frac{1}{13}\pi-\frac{3}{13}\log\frac{15}{16}}$$

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る。

(2)　1 個のサイコロを 5 回投げるとき，

(a)　同じ目が続けて出ない確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカキ}}}$ である。

(b)　同じ目が 2 回以上続けて出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケコ}}}{\boxed{\text{サシスセ}}}$ である。

(c)　同じ目が 4 回以上続けて出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツテト}}}$ である。

(d)　同じ目が 3 回以上続けて出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(a)　サイコロの目の出方は 6^5 通りあり，これらはすべて同様に確からしい。このうち，同じ目が続けて出ない場合は，2 回目以降の目がその前の目と異なる場合であるから

$$6\cdot 5^4 \text{通り}$$

である。よって，求める確率は

$$\frac{6\cdot 5^4}{6^5} = \frac{\mathbf{625}}{\mathbf{1296}}$$

(b)　同じ目が 2 回以上続けて出るという事象は，(a) の事象の余事象であるから，
求める確率は

$$1 - \frac{625}{1296} = \frac{\mathbf{671}}{\mathbf{1296}}$$

(c)　同じ目が 4 回以上続けて出るのは
A を 1〜6 のいずれか，B を A 以外の目として，順に

AAAAA，AAAAB，BAAAA

と出る場合である。
よって，求める確率は

$$\frac{6(1+5+5)}{6^5} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{1296}}$$

(c)　同じ目が 3 回以上出るのは，(c) の場合に加えて同じ目が 3 回続けて出る場合である。
同じ目が 3 回続けて出る場合は
A を 1〜6 のいずれか，B，C を A 以外の目，○を任意の目として，順に

AAAB○，BAAAC，○BAAA

と出る場合で，

$$6(5\cdot 6\times 2 + 5\cdot 5)\ \text{通り}$$

である。よって，求める確率は

$$\frac{6\cdot 11 + 6(5\cdot 6\times 2+5\cdot 5)}{6^5} = \frac{96}{6^4} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{27}}$$

Ｉ　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る。

(3)　実数 b，c を用いて一般項が $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}c^k$ と表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(a)　$b = 3$，$c = -2$ のとき，a_5 を 5 で割った余りは $\boxed{\text{ア}}$ である。

(b)　$b = \dfrac{1}{2}$，$c = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(c)　$b = \dfrac{1}{2}$，$c = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ $(|x| < 1)$ を用いた。

解答

(a)　$b = 3$，$c = -2$ のとき

$$\begin{aligned} a_5 &= \sum_{k=0}^{5} 3^{5-k}(-2)^k \\ &= 3^5 - 3^4\cdot 2 + 3^3\cdot 2^2 - 3^2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 - 2^5 \\ &= 133 \end{aligned}$$

より，5 で割った余りは **3**

別解

以下，合同式の法を 5 として考える。

$$\begin{aligned} a_5 &= \sum_{k=0}^{5} 3^{5-k}(-2)^k \\ &\equiv \sum_{k=0}^{5} 3^{5-k}3^k \qquad (\because \quad -2 \equiv 3) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{5} 3^5 = 3^5\cdot 6 \equiv 3\cdot 1 = \mathbf{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} b^{n-k}c^k \\ &= b^n + b^{n-1}c + b^{n-2}c^2 + \cdots\cdots + c^n \\ &= \frac{b^n\left\{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1}\right\}}{1 - \frac{c}{b}} \\ &= \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b - c} \end{aligned}$$

であるから，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=-\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{N=1}^{n} a_N\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{N=1}^{n}\frac{b^{N+1}-c^{N+1}}{b-c}\\ &= \frac{1}{b-c}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{N=1}^{n} b^{N+1}-\sum_{N=1}^{n} c^{N+1}\right\}\\ &= \frac{1}{b-c}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{b^2(1-b^n)}{1-b}-\frac{c^2(1-c^n)}{1-c}\right\}\\ &= \frac{1}{b-c}\left\{\frac{b^2}{1-b}-\frac{c^2}{1-c}\right\}\\ &= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(c)　実数の定数 r $(r \fallingdotseq 1)$ に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} nr^{n+1}$ とする。

$$\begin{array}{rl} S_n &= r^2+2r^3+3r^4+\cdots\cdots+nr^{n+1}\\ -)\ rS_n &= \qquad\quad r^3+2r^4+\cdots\cdots+(n-1)r^{n+1}+nr^{n+2}\\ \hline (1-r)S_n &= r^2+r^3+r^4+\cdots\cdots+r^{n+1}\qquad\qquad -nr^{n+2}\\ \therefore\ S_n &= \dfrac{r^2(1-r^n)}{(1-r)^2}-\dfrac{nr^{n+2}}{1-r}\end{array}$$

であるから，$|r|<1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} nr^{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{r^2(1-r^n)}{(1-r)^2}-\frac{nr^n\cdot r^2}{1-r}\right\}=\frac{r^2}{(1-r)^2}\quad\cdots\cdots①$$

であることに注意しておく。

さて，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=-\dfrac{1}{3}$ のとき

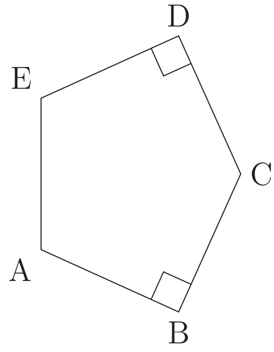
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} na_n &= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{b^{n+1}-c^{n+1}}{b-c}\\ &= \frac{1}{b-c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(nb^{n+1}-nc^{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{b-c}\left\{\frac{b^2}{(1-b)^2}-\frac{c^2}{(1-c)^2}\right\}\qquad(\because\ ①)\\ &= \frac{6}{5}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}\right\}\\ &= \frac{6}{5}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\boldsymbol{\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{II}}$ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る。

右 (下) 図の五角形 ABCDE において，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE} = \mathrm{EA} = 1,\ \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{D} = 90^\circ$$

である。



(a) $\cos\angle\mathrm{ACE} = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

また，五角形 ABCDE の面積は $\dfrac{\boxed{ウ} + \sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である。

(b) $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{q}$ とすると $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $\vec{p} \cdot \vec{q} = -\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ である。ここで

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = s\vec{p} + t\vec{q}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 0$, $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} > 0$ より

$s = \dfrac{\boxed{ク} + \sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$, $t = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ を得る。

辺 AE の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \dfrac{\boxed{ス} + \sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}\left(\vec{p} + \vec{q}\right)$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = -\dfrac{\boxed{タ} + \sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}\vec{p} - \dfrac{\boxed{テ} + \sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}\vec{q}$ となる。

(c) 五角形 ABCDE と合同な五角形を用いて図 1 のように隙間も重なりもなく平面を敷き詰めることができる。この平面の敷き詰めの周期的構造を特徴づけるベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ をとる。ただし，点 M$'$ は辺 A$'$E$'$ の中点，点 M$''$ は辺 A$''$E$''$ の中点である。

このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = -\dfrac{\boxed{ニ} + \sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}\vec{p} - \dfrac{\boxed{ノ} + \sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}\vec{q}$ であり，

$|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2 = \boxed{フ} + \sqrt{\boxed{ヘ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MM''}} = \boxed{ホ}$ である。

また，△MM′M″ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{マ}}+\sqrt{\boxed{\text{ミ}}}}{\boxed{\text{ム}}}$ である。

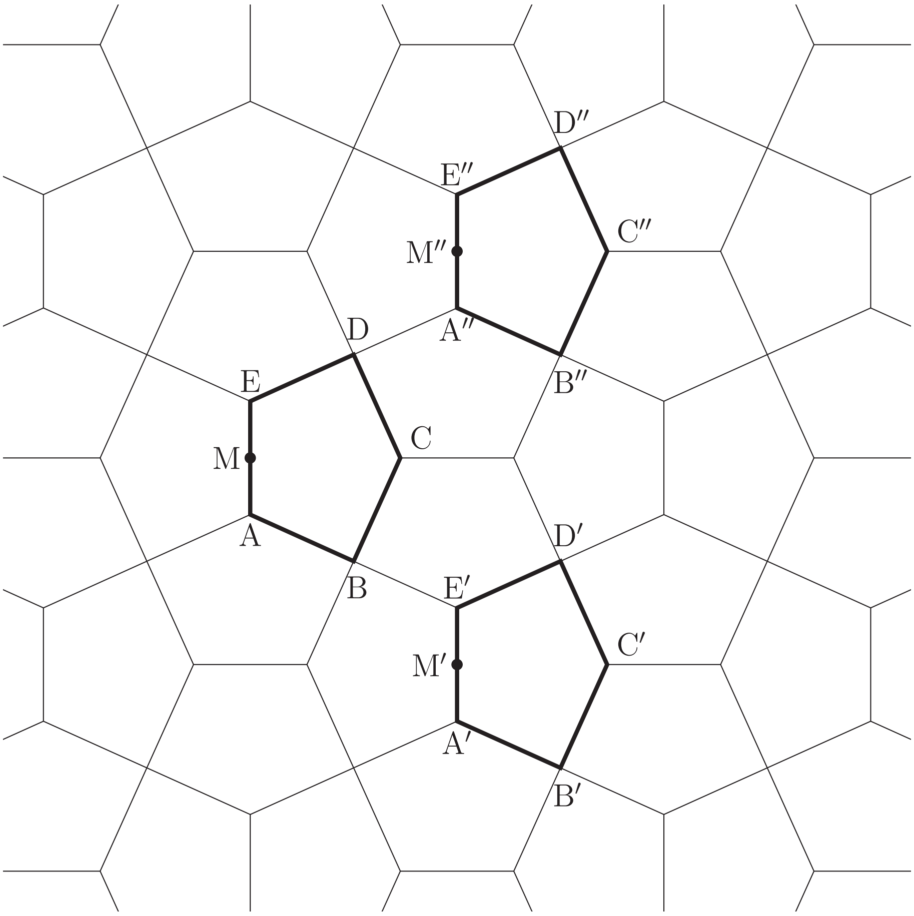


図 1

解答

(a)　△ABC，△EDC は直角二等辺三角形であることから，EC = CA = $\sqrt{2}$ なので，△ACE に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{ACE}=\frac{2+2-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

五角形 ABCDE の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S=&\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{EDC}+\triangle\mathrm{ACE}\\=&1\cdot1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\angle\mathrm{ACE}\\=&\mathbf{\frac{4+\sqrt{7}}{4}}\end{aligned}$$

(b)　$\angle\mathrm{DCB} = \angle\mathrm{ACE} + 90^\circ$ であるから，

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q} &= |\vec{p}||\vec{q}|\cos(\angle\mathrm{ACE}+90^\circ)\\ &= |\vec{p}||\vec{q}|(-\sin\angle\mathrm{ACE})\\ &= 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\\ &= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{7}}{4}}\end{aligned}$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \sqrt{2}$ $(|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であることから

$$\begin{cases} |s\vec{p} + t\vec{q}|^2 = 2 \\ \vec{p}\cdot\left\{(1-s)\vec{p} - t\vec{q}\right\} = 0 \end{cases}$$

これに，$|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$，$\vec{p}\cdot\vec{q} = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ を用いると

$$\begin{cases} s^2 + t^2 - \dfrac{\sqrt{7}}{2}st = 2 \\ s - \dfrac{\sqrt{7}}{4}t = 1 \end{cases}$$

が得られる。よって，t を求めると

$$\left(1+\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)^2 + t^2 - \frac{\sqrt{7}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)t = 2 \iff 9t^2 = 16$$

$$\iff t = \pm\frac{4}{3}$$

ゆえに　$(s,t) = \left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{3},\ \dfrac{4}{3}\right),\ \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$

条件 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} > 0$ より

$$\begin{aligned}&\vec{q}\cdot\left\{(s-1)\vec{p} + t\vec{q}\right\} > 0\\ &-\frac{\sqrt{7}}{4}(s-1) + t > 0\\ &t > \frac{\sqrt{7}}{4}(s-1)\end{aligned}$$

であるので，この条件を満たす s，t は

$$\boldsymbol{s = \frac{3+\sqrt{7}}{3},\ t = \frac{4}{3}}$$

三平方の定理より，$\mathrm{CM} = \sqrt{2-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ である。

$$\begin{aligned}|\vec{p}+\vec{q}|^2 &= 1+1+2\vec{p}\vec{q}\\ &= \frac{4-\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，$|\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}|=\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CM}}&=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{7}-1}{2}}\left(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{7+\sqrt{7}}{6}\left(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}\right)}\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MB}}&=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&=\overrightarrow{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}\left(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{1+\sqrt{7}}{6}\overrightarrow{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{6}\overrightarrow{q}}\end{aligned}$$

(c)　$\triangle\mathrm{MAB}\equiv\triangle\mathrm{M'E'B}$ より，$\angle\mathrm{MBA}=\angle\mathrm{M'BE'}$ が成り立ち，かつ A，B，E′ は同一直線上にあることから，点 B は線分 MM′ の中点となっている。よって，$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}=2\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ であることから，(b) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MM'}}&=\boldsymbol{-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\overrightarrow{p}-\frac{7+\sqrt{7}}{3}\overrightarrow{q}}\\&=-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\left(\overrightarrow{p}+\sqrt{7}\overrightarrow{q}\right)\end{aligned}$$

ゆえに

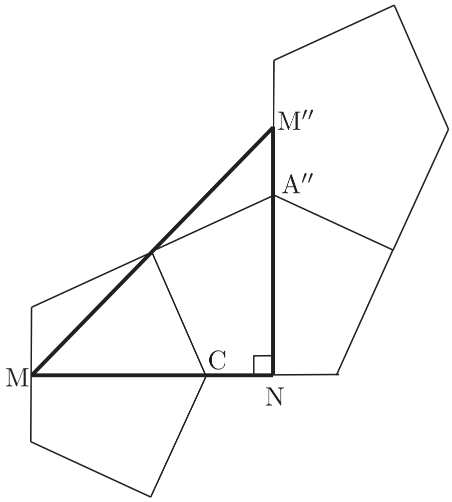
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2&=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2|\overrightarrow{p}+\sqrt{7}\overrightarrow{q}|^2\\&=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2\left(1+7-\frac{7}{2}\right)\\&=\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\cdot\frac{9}{2}\\&=\boldsymbol{4+\sqrt{7}}\end{aligned}$$

さらに，問題文の図 1 に注目し，直線 MC と直線 E″A の交点を N とすると，点 N は五角形の一辺の中点になることから

$$\mathrm{MC}=\mathrm{A''N},\ \text{かつ}\ \mathrm{CN}=\mathrm{A''M''}$$

となり，$\mathrm{MC}+\mathrm{CN}=\mathrm{A''N}+\mathrm{A''M''}$，すなわち $\mathrm{MN}=\mathrm{NM''}$ が成り立つので，

$$\angle\mathrm{M''MN}=45^\circ$$



となる。対称性から，$\angle \mathrm{M''MM'} = 2\angle \mathrm{M''MN} = 90^\circ$ であるので，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{MM'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MM''}} = 0}$$

さらに，$\mathrm{MM'} = \mathrm{MM''}$ であるから，$\triangle \mathrm{MM'M''}$ の面積は

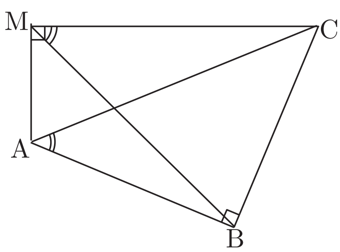
$$\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{MM'}}|^2 = \boldsymbol{\frac{4+\sqrt{7}}{2}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

四角形 CMAB に注目すると，$\angle \mathrm{CMA} = \angle \mathrm{CBA} = 90^\circ$ より，四角形 CMAB は円に内接する四角形である。よって，円周角の定理より

$$\angle \mathrm{CMB} = \angle \mathrm{CAB} = 45^\circ$$

ゆえに，$\angle \mathrm{DMB} = 45^\circ \times 2 = 90^\circ$ である。点 B，D はそれぞれ直線 $\mathrm{MM'}$，直線 $\mathrm{MM''}$ 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ である。ゆえに，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{MM'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MM''}} = 0}$ となる。



$\boxed{\text{III}}$

$f(0)=1,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ を満たす増加関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする。このとき，正の整数 n に対して $a_n = f^{-1}(n)$ とし，

$$S_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1}-a_k) & (n \geqq 2) \end{cases}$$

とする。

(1)　$f(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，a_2，a_3 を求めよ。
(2)　$f(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，S_n を n を用いて表せ。
(3)　$f(x)=e^x$ のとき，$S_n = n\log_n - \log(n!)$ を示せ。
(4)　正の整数 n に対して $n! \geqq n^n e^{1-n}$ を示せ。

解答

(1)　$y=\sqrt{x+1}$ とおくと

$$y^2 = x+1$$
$$x = y^2 - 1$$

x と y を入れ替えて $y=x^2-1$ となるので，$f^{-1}(x)=x^2-1$ である。
よって，$a_n = n^2-1$ より

$$a_2 = \mathbf{3},\ a_3 = \mathbf{8}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k\{(k+1)^2 - k^2\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2+k) \\ &= 2\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} \end{aligned}$$

$n=1$ とすると 0 となるのでこのときも成立する。
よって

$$S_n = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}$$

注釈

一般的に

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (ka_{k+1} - ka_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \{(k+1)a_{k+1} - ka_k - a_{k+1}\} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \{(k+1)a_{k+1} - ka_k\} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \\
&= na_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}
\end{aligned}
$$

と計算できるので，この変形を用いて計算してもよい。

(3)　$y = e^x$ とおくと

$$x = \log y$$

x と y を入れ替えて $y = \log x$ となるので，$f^{-1}(x) = \log x$ である。

したがって，$a_n = \log n$ である。

$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k\log(k+1) - k\log k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \{(k+1)\log(k+1) - k\log k - \log(k+1)\} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \{(k+1)\log(k+1) - k\log k\} - \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) \\
&= n\log n - 1 \cdot \log 1 - (\log 2 + \log 3 + \cdots\cdots + \log n) \\
&= n\log n - \log(n!)
\end{aligned}
$$

$n = 1$ とすると 0 となるのでこのときも成立する。

よって

$$S_n = \boldsymbol{n\log n - \log(n!)}$$

(4)　まず，$x > 0$ のとき

$$\log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$$

であることを示す。$g(x) = \log x$ とおくと，$y = g(x)$ は $x > 0$ において微分可能であるので，平均値の定理より

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = g'(c),\ x < c < x+1$$

となる c が存在する。したがって

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことが言える。
$n=1$ のとき与式は成立するので，以下，$n \geqq 2$ において与式が成立することを示す。
$(*)$ を用いると

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) \\
&< \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{1}{k} \quad (\because k > 0,\ (*)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= n-1
\end{aligned}$$

(3) より，$S_n = n\log n - \log(n!)$ であるので

$$\begin{aligned}
& n\log n - \log(n!) < n-1 \\
\Longleftrightarrow\ & \log \frac{n^n}{n!} < \log e^{n-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{n^n}{n!} < e^{n-1} \quad (\because \text{自然対数の底 } e > 1) \\
\Longleftrightarrow\ & n! > n^n e^{n-1} \quad (\because n! > 0,\ e^{1-n} > 0)
\end{aligned}$$

以上より，$n \geqq 1$ のとき $n! \geqq n^n e^{n-1}$ が成り立つ。(なお，等号は $n=1$ のとき成立する。)

注釈

考え方としては次のようになる。
まず $n! \geqq n^n e^{n-1}$ の両辺の自然対数を考えると

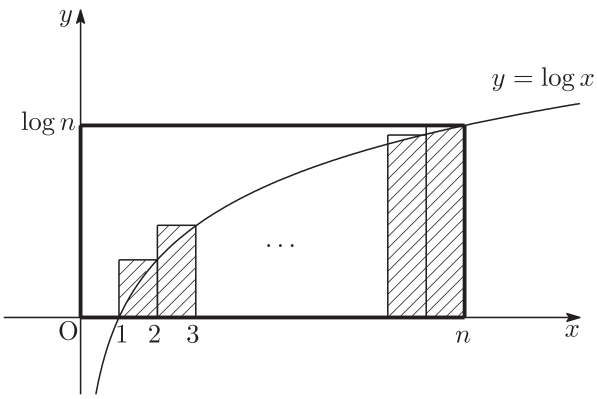
$$\begin{aligned}
& n! \geqq n^n e^{n-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \log(n!) \geqq n\log n + 1 - n \\
\Longleftrightarrow\ & n\log n - \log(n!) \leqq n-1
\end{aligned}$$

となるので，$S_n \leqq n-1$ を示せばよいことがわかる。
さらに，$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k)$ であるので，$\sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) \leqq n-1$ を示せばよいことがわかる。
あとは $h(x) = x\{\log(x+1) - \log x\}$ $(x > 0)$ とおいて $h(x) \leqq 1$ を示す。増減を調べてもよいが，上記のように平均値の定理を用いると計算量を大幅に減らすことが可能である。

注釈

$S_n < n-1$ はさまざまな評価が考えられるが，一例として次のように面積評価により示してもよい。

$$\begin{aligned}
S_n &= n\log n - \log(n!) \\
&= n\log n - \sum_{k=2}^{n} \log k \\
&= (\text{太線枠内の面積}) - (\text{斜線部分の面積}) \\
&< \int_0^{\log n} e^y\,dy = n-1
\end{aligned}$$


y
$y = \log x$
$\log n$
O
1
2
3
$\cdots$
n
x

講評

Ⅰ ［(1) 数Ⅲ積分法，(2) 確率，(3) 数列，極限］（易）

(1) 三角関数の積分に関する問題であった。典型的な出題なのでしっかりと得点したい。
(2) サイコロの確率の問題であった。典型的な出題なのでしっかりと得点したい。
(3) は (無限) 級数の問題であった。計算自体は典型的だが，要領の良い計算が求められる。

Ⅱ ［平面図形，ベクトル］（やや易）

各辺の長さが等しい五角形に関する図形の問題であった。(c) は図にやや圧倒されるかもしれないが，対称性や辺の長さなどに注目して解けばよく，特に難しいところはない。

Ⅲ ［数列，関数］（標準）

例年通り証明を含む大問となったが，証明要素がある問題は (4) のみとなっている。(3) は計算すればよいだけである。

Ⅰ Ⅱ は計算がメインで解きやすい問題であった。所々数字が煩雑な箇所があったため，そこで計算ミスをしないようにしたい。Ⅲ は証明要素がある問題は (4) のみとなっていて，(3) まではしっかりと得点したいところだ。全体的には昨年度と同程度，またはやや易しい程度の難易度であったと言えるだろう。ただし，分量に対して時間が短いことに変わりはなく，いかに計算ミスなく要領よく進めれれたが問われた形だろう。一次突破ラインは数学の配点率が低く何とも言えず他科目次第では 65 %なくても問題ないであろうが，70〜75% 程度としたい。