解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2024年 2月18日実施

1.

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

1 から 3 までの番号をつけた赤玉 3 個と，1 から 3 までの番号をつけた白玉 3 個が入った袋から，球を 1 個ずつ 3 回取り出し，玉に書かれた番号を取り出した順に a_1，a_2，a_3 とする。ただし，取り出した玉はもとに戻さないものとする。

取り出した 3 個の玉が，赤玉 2 個，白玉 1 個であったとき，

$a_1 < a_2 < a_3$ となる条件付き確率は $\boxed{（ア）}$，

$a_1 < a_2$ かつ $a_2 > a_3$ となる条件付き確率は $\boxed{（イ）}$

である。

解答

玉の取り出し方は ${}_6\mathrm{P}_3 = 120$ 通りあり，これらは同様に確からしい。

取り出した 3 個の玉が，赤玉 2 個，白玉 1 個となる事象を A,

$a_1 < a_2 < a_3$となる事象を B,

$a_1 < a_2$かつ $a_2 > a_3$となる事象を C

とすると

$$P(\mathrm{A}) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot 3!}{120} = \frac{9}{20}$$

(ア)　$a_1 < a_2 < a_3$ をみたす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組み合わせは

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 3)$$

のみである。$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ となるのは白玉が何回目に出るかを考えて

$${}_3\mathrm{C}_1 = 3 \text{ 通り}$$

あるため,

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

したがって，求める条件付き確率は

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{9}{20}} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

注釈

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{n(\mathrm{A})} = \frac{3}{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot 3!} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(イ)　$a_1 < a_2$ かつ $a_2 > a_3$ となる $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組み合わせは

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 2),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1)$$

のいずれかである。
$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 2)$ のそれぞれに対して，白玉を 1 回目か 3 回目のどちらで出すかを考えて

$${}_2\mathrm{C}_1 = 2 \text{ 通り}$$

$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1)$ のそれぞれに対して，白玉を何回目に出すかを考えて

$${}_3\mathrm{C}_1 = 3 \text{ 通り}$$

よって，$\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ となる玉の取り出し方は

$$3 \times {}_2\mathrm{C}_1 + 2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 12 \text{ 通り}$$

であるから，$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$ であるので，求める条件付き確率は

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{20}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = \frac{n(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})}{n(\mathrm{A})} = \frac{12}{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot 3!} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

2.

$1 < a < 2$ をみたす実数 a について,

$$S(a) = \int_1^2 |\log(1+x) - \log ax|\, dx$$

とするとき，次の問いに答えよ。ただし，log は自然対数である。

(1)　a の値に応じて，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で方程式 $\log(1+x) - \log ax = 0$ の解の個数を調べよ。

(2)　$S(a)$ を求めよ。

(3)　$S(a)$ $(1 < a < 2)$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

解答

(1)　$1 < a < 2$，$1 \leqq x \leqq 2$ であることに注意して，

式 $\log(1+x) - \log ax = 0$ より，

$$\log(1+x) - \log x - \log a = 0$$

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log a$$

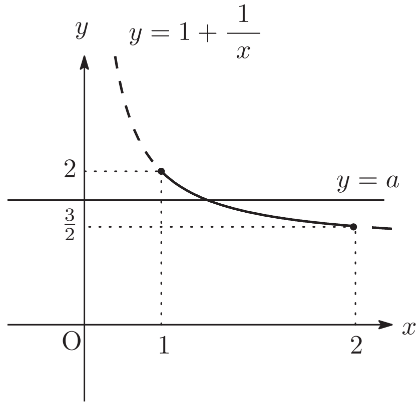
$$\frac{x+1}{x} = a$$

$$\therefore\ 1 + \frac{1}{x} = a$$

であるから，求める解の個数は

$$y = 1 + \frac{1}{x}\ (1 \leqq x \leqq 2) \text{ と } y = a$$

のグラフの共有点の個数に等しい。



図より，解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{1 < a < \frac{3}{2}} \text{ のとき } \mathbf{0} \text{ 個} \\ \mathbf{\frac{3}{2} \leqq a < 2} \text{ のとき } \mathbf{1} \text{ 個} \end{cases}$$

(2)

$$\int \{\log(1+x) - \log ax\}\, dx = \int \{\log(1+x) - \log x - \log a\}\, dx$$
$$= (1+x)\log(1+x) - x\log x - (\log a)x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$F(x) = (1+x)\log(1+x) - x\log x - (\log a)x$$

とする。

(i)　$1 < a < \dfrac{3}{2}$ のとき

(1) の過程から，$\log(1+x) - \log ax > 0$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ とわかるので

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^2 \{(1+x)\log(1+x) - \log ax\}\,dx \\ &= \Big[F(x)\Big]_1^2 \\ &= F(2) - F(1) \\ &= 3\log 3 - 2\log 2 - 2\log a - (2\log 2 - \log a) \\ &= \log\frac{27}{16} - \log a \end{aligned}$$

(ii)　$\dfrac{3}{2} \leqq a < 2$ のとき

(1) の過程より，$\log(1+x) - \log ax = 0$ $\cdots\cdots$① の解は

$$\frac{1+x}{x} = a \qquad \therefore\ x = \frac{1}{a-1}\ (= t \text{ とおく})$$

であり，

$$\begin{cases} 1 \leqq x < t \text{ のとき，} \log(1+x) - \log ax > 0 \\ t < x \leqq 2 \text{ のとき，} \log(1+x) - \log ax < 0 \end{cases}$$

とわかるから，$t = \dfrac{1}{a-1}$ に注意して

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^t \{(1+x)\log(1+x) - \log ax\}\,dx + \int_t^2 \{\log ax - (1+x)\log(1+x)\}\,dx \\ &= \Big[F(x)\Big]_1^t + \Big[-F(x)\Big]_t^2 \\ &= 2F(t) - F(2) - F(1) \\ &= 2\{(1+t)\log(1+t) - t\log t - (\log a)t\} - (3\log 3 - 2\log 2 - 2\log a) - (2\log 2 - \log a) \\ &= 5\log a - 2\log(a-1) - 3\log 3 \end{aligned}$$

以上より

$$\boldsymbol{S(a) = \begin{cases} \log\dfrac{27}{16} - \log a & \left(1 < a < \dfrac{3}{2} \text{のとき}\right) \\ 5\log a - 2\log(a-1) - 3\log 3 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq a < 2 \text{ のとき}\right) \end{cases}}$$

(3)

(i)　$1 < a < \dfrac{3}{2}$ のとき

$S(a) = \log\dfrac{27}{16} - \log a$ は減少関数である。

(ii)　$\dfrac{3}{2} < a < 2$ のとき

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{5}{a} - \frac{2}{a-1} \\ &= \frac{3a-5}{a(a-1)} \end{aligned}$$

であるから，$S(a)$ の増減は以下のようになる。

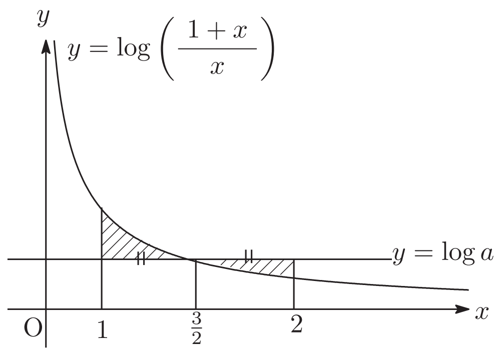
a	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって，$S(a)$ は $\boldsymbol{a = \frac{5}{3}}$ のときに極小かつ最小である。
最小値は

$$\begin{aligned} S\left(\frac{5}{3}\right) &= 5\log\frac{5}{3} - 2\log\frac{2}{3} - 3\log 3 \\ &= \mathbf{5\log 5 - 6\log 3 - 2\log 2} \end{aligned}$$

注釈

$\frac{5}{3} < a < 2$ のとき，$S(a)$ は
曲線 $y = \log(1+x) - \log x$ と直線 $y = \log a$ の間の面積
を表しており，下図の状況で最小となることは経験からすぐにわかる。



よって，$S(a)$ は

$$\log a = \log\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\therefore\ a = \frac{5}{3}$$

のときに最小となることもすぐにわかる。

3.

p，q は互いに素である自然数とする。実数 a，b，c に対して，x の 2 次多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える。ただし，$a\neq 0$ とする。

$f(x)$ が条件「ある整数 k について $f(k-1)$，$f(k)$，$f(k+1)$ は整数となり，$f(x)$ は $px-q$ で割り切れる」を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{2a}{p}$，$\dfrac{2c}{q}$ は整数であることを示せ。

(2) 命題「$f(x)$ が上の条件をみたすならば，$\dfrac{a}{p}$，$\dfrac{c}{q}$ は整数である」は正しいか。正しければそれを示せ。正しくなければ，反例を 1 つあげよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $f(k-1)$，$f(k)$，$f(k+1)$ は整数より，整数 l，m，n を用いて

$$\begin{cases} f(k-1) &= l \\ f(k) &= m \\ f(k+1) &= n \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} a(k-1)^2+b(k-1)+c &= l & \cdots\cdots① \\ ak^2+bk+c &= m & \cdots\cdots② \\ a(k+1)^2+b(k+1)+c &= n & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①②③を a，b，c について解くと

$$\begin{cases} a = \dfrac{l+n}{2}-m \\ b = (-l-n+2m)k-\dfrac{l-n}{2} \\ c = \left(\dfrac{l+n}{2}-m\right)k^2-\dfrac{l-n}{2}k+m \end{cases}$$

すなわち，$2a$，$2b$，$2c$ は整数である。

ここで，$f(x)$ は $px-q$ で割り切れることより，因数定理を用いて

$$f\left(\frac{q}{p}\right)=0$$

$$\iff aq^2+bpq+cp^2=0 \quad \cdots\cdots④$$

④を変形して

$$aq^2=p(-bq-cp)$$

$$\iff 2aq^2=p(-2bq-2cp)$$

よって，$2a$，$2b$，$2c$ が整数であることと，p，q が互いに素な自然数であることに注意して，$2a$ は p の倍数であることがわかるので，$\dfrac{2a}{p}$ は整数である。

また，同様に考えて④を変形すると，$2cp^2=q(-2aq-2bp)$ となる。よって，$2c$ は q の倍数であることがわかるので，$\dfrac{2c}{q}$ は整数である。

(2) l，n がともに 2 の倍数であるかともに 2 の倍数でないとき，a，b，c は整数となるので，$aq^2=p(-bq-cp)$ より $\dfrac{a}{p}$ が整数であることは言えるが，l，n の一方が 2 の倍数であり他方が 2 の倍数でないとき，a は整数とな

らないので $\dfrac{a}{p}$ が整数ではない。

よって，命題「$f(x)$ が上の条件をみたすならば，$\dfrac{a}{p}$，$\dfrac{c}{q}$ は整数である」は偽であり，その反例は，l，n が一方は 2 の倍数となり他方が 2 の倍数とならないような $f(x)$ で考える。

たとえば，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 0,\ 0)$，$k=0$ とすると，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ となる。よって，反例の 1 つは $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x}=\dfrac{1}{2}x(x-1)\ (p=1,\ q=1)$ である。

注釈

反例を探すときはいくつか $f(x)$ を具体的に求めて p，q が互いに素となるようなものを考えればよい。なお，$f(x)$ に $\dfrac{1}{2}$ が含まれていることに注目して x が整数のとき 2 連続整数 $x(x+1)$，$(x-1)(x-2)$ などから関数 $f(x)$ を考えていってもよいだろう。

注釈

$c=\dfrac{k(k-1)}{2}l+\dfrac{k(k+1)}{2}n+(k^2+1)m$ より c はつねに整数である。

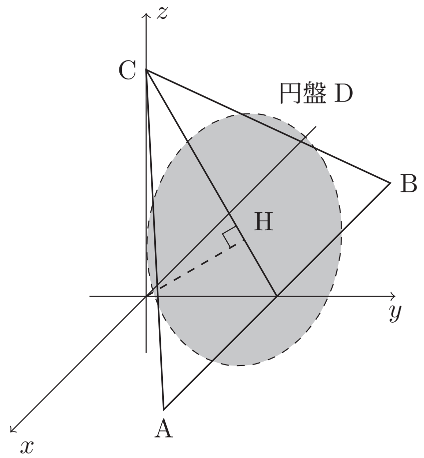
4.

O を原点とする xyz 空間において，3 点 A$\left(1,\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$，B$\left(-1,\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ の定める平面 ABC 上に O から垂線 OH を下ろす。平面 ABC において，H を中心とする半径 1 の円板（内部も含む）D を考えるとき，次の問いに答えよ。

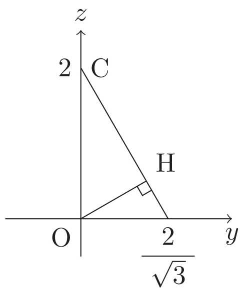
(1) 平面 $z=t$ が D と交わるような t の値の範囲を求めよ。

(2) D を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，D が通過してできる立体 K の体積 V を求めよ。

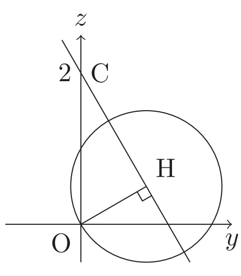
解答



(1) 平面 ABC は平面 $x=0$ で対称であるため，H は yz 平面上にある。



yz 平面上での平面 ABC の断面は $z=-\sqrt{3}y+2$ である。直線 OH は $z=\frac{1}{\sqrt{3}}y$ となるため H$\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ である。



平面 yz 上において，円盤 D と直線 CH の交点は連立方程式

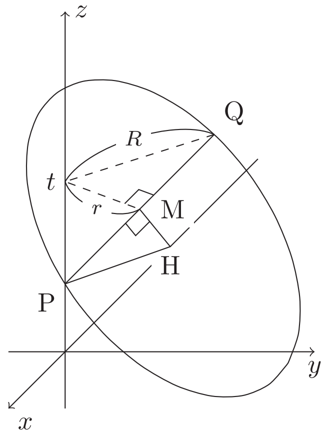
$$\begin{cases} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 \\ z=-\sqrt{3}y+2 \end{cases}$$

の解である．これを解くと，$(y,\ z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$（複号同順）であるため，求める t の範囲は

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ である。

(2)　簡単のために $\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とおく。

下図のように円盤 D と 平面 $z=t$ の交わる部分に点 P，Q，M をおく。



平面 $z=t$ と円盤 D の交わる部分と，z 軸の距離の最大値を R，最小値を r とおく。

平面 $z=t$ 上での立体 K の断面は半径 R の円から半径 r の円をくり抜いたものになるため，その面積は $\pi(R^2-r^2)$ である。

図より $R^2-r^2=\mathrm{PM}^2$ となる。今 $\mathrm{PM}^2=\mathrm{PH}^2-\mathrm{MH}^2$ である。

$$\mathrm{MH}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left|t-\frac{1}{2}\right|,\ \mathrm{PH}=1$$

より

$$\mathrm{PM}^2=1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{3}(\beta-t)(t-\alpha)$$

である。こうして

$$\begin{aligned}V&=\frac{4}{3}\pi\int_\alpha^\beta(\beta-t)(t-\alpha)dt\\&=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{2}{9}\pi\times(\sqrt{3})^3\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi}\end{aligned}$$

講評

1.［確率］（やや易）
例年同様に確率からの出題であった。袋から玉を取り出すオーソドックスな状況の問題であり，後半の問題のことを考えると，この問題は確実に解きたいところである。

2.［数 III 積分法］（やや易～標準）
定積分で表された関数の最小値に関する出題であった。誘導も丁寧でただの計算問題であるので，ここもしっかりと得点したいところである。なお，積分の最小値を簡単に求める方法（いわゆる「はみ出し削り」）は，YMS の慈恵医大入試予想の冊子で取り扱っているので，学習した人は最小となる a の値を瞬間的に求められたであろう。

3.［整数の性質］（やや難）
有理数が整数かどうかを判定する問題であった。a，b，c に関する条件がわかれば，あとは有理数を扱う際によく行う変形をすればいいだけである。なお，"多項式に既約分数を代入する"という手法は 11 月の慈恵医大模試第 3 問でも扱っている。

4.［空間図形］（標準）
空間座標内にある円板が回転してできる立体の体積に関する出題であった。他大学でも類似の出題はあり，計算ミスに注意して取り組みたい。なお，空間内の円板を直線のまわりに回転してできる立体の体積の問題は，「YMS の慈恵直前対策」や「5G への数学」の授業で扱っていたので，受講していた人は安心して取り組めただろう。

例年に比べやや易しくなった印象である。例年に比べると取り組みやすい問題が多かったのではないか。計算が重い問題もなく，ミスなく丁寧に計算できたかが問われた出題内容であった。一次突破ラインは 55～60% 程度か。