埼玉医科大学（後期）　数学

2023年 3月4日実施

$\boxed{1}$

次の問い (問 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　$\sin\dfrac{5}{12}\pi$ は，整数を係数とする t の 4 次方程式

$$\boxed{\ 1\ }\boxed{\ 2\ }t^4-\boxed{\ 3\ }\boxed{\ 4\ }t^2+1=0$$

を満たす。この方程式を満たす t をすべて求めると，

$$t=\pm\frac{\sqrt{\boxed{\ 5\ }}+\sqrt{\boxed{\ 6\ }}}{\boxed{\ 7\ }},\ \pm\frac{\sqrt{\boxed{\ 8\ }}-\sqrt{\boxed{\ 9\ }}}{\boxed{\ 10\ }}$$

である。ただし，$\boxed{\ 5\ }>\boxed{\ 6\ }$ かつ $\boxed{\ 8\ }>\boxed{\ 9\ }$ とする。

問 2　座標平面上に 4 点 A$(-1,\ 1)$，B$(-1,\ -1)$，C$(1,\ -1)$，D$(1,\ 1)$ からなる正方形 ABCD があり，x 軸上に 2 点 P$(-a,\ 0)$，Q$(a,\ 0)$ をとる。ただし，$a>0$ とする。このとき，$L=\mathrm{PQ}+\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{QC}+\mathrm{QD}$ が最小値をとるのは

$$a=\boxed{\ 11\ }-\frac{\sqrt{\boxed{\ 12\ }}}{\boxed{\ 13\ }}$$

のときであり，最小値は

$$L=\boxed{\ 14\ }\left(\boxed{\ 15\ }+\sqrt{\boxed{\ 16\ }}\right)$$

である。

解答

問 1　$\cos\dfrac{5}{6}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。倍角の公式より

$$\cos\frac{5}{6}\pi=1-2\sin^2\frac{5}{12}\pi$$

であった。両辺を 2 乗することで

$$\frac{3}{4}=1-4\sin^2\frac{5}{12}\pi+4\sin^4\frac{5}{12}\pi$$

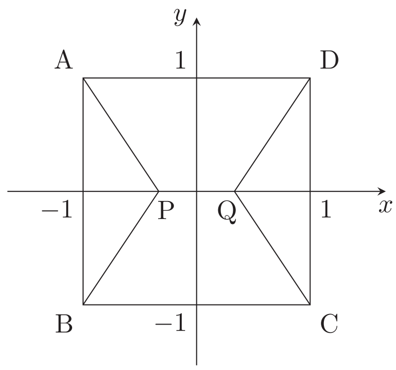
を得る。整理することで $\boldsymbol{16t^4-16t^2+1=0}$ を得る。

方程式を解くことで

$$t^2=\frac{8\pm2\sqrt{12}}{16}=\left(\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}\right)^2\quad(\text{複号同順})$$

である。よって $t = \pm\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$，$\pm\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$ である。

問 2



最小値を考えるので，$0 < a \leqq 1$ で考える。

対称性より $\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{QC} = \mathrm{QD}$ である。

$\mathrm{PA} = \sqrt{(1-a)^2+1} = \sqrt{2-2a+a^2}$ より $L = 4\sqrt{2-2a+a^2}+2a$ となる。

$0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dL}{da} &= \frac{4(a-1)}{\sqrt{2-2a+a^2}}+2 \\ &= 2\frac{2(a-1)+\sqrt{2-2a+a^2}}{2}\end{aligned}$$

より $\dfrac{dL}{da} = 0$ を解くと

$$4(a-1)^2 = a^2-2a+2$$

$$3a^2-6a+2 = 0$$

$$a = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3} = 1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。$1-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1 < 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ に注意すると増減表は

a	(0)	$\cdots$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
L'		$-$	0	$+$	
L		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

となる。

こうして $a = \boldsymbol{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ のとき最小値

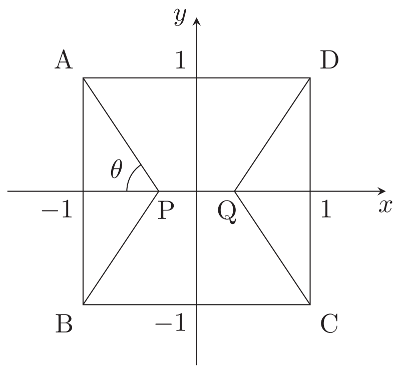
$$\begin{aligned}L &= 4\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{2(1+\sqrt{3})}\end{aligned}$$

をとる。

別解

a のままでは計算が大変である。

最小値を取るのは $0 < a \leqq 1$ のときであるため，その区間内で考えることとする。$\mathrm{E}(-1,\ 0)$ とおき，$\theta = \angle\mathrm{APE}$ とおこう。図より $\dfrac{\pi}{4} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。



$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\mathrm{PA} = \dfrac{1}{\sin\theta}$，$\mathrm{OP} = 1 - \dfrac{1}{\tan\theta}$ であるため

$$L = 2 - \frac{2}{\tan\theta} + \frac{4}{\sin\theta} = 2 + \frac{4 - 2\cos\theta}{\sin\theta}$$

である。

$$\begin{aligned}\frac{dL}{d\theta} &= \frac{2\sin\theta\sin\theta - (4 - 2\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{2 - 4\cos\theta}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

となる。$\dfrac{dL}{d\theta} = 0$ となるのは $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のときである。増減表は

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
L'		$-$	0	$+$	
L		↘	最小	↗	

となる。ゆえに $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，すなわち $a = 1 - \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のときに L は最小値をとる。

注釈

$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部を点 P が動く状況を考える。AP＋BP＋CP が最小となるのは $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{CPA} = 120^\circ$ となるときであることが知られている。このときの P をフェルマー点という。

本問では点 P，Q がそれぞれ $\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OCD}$ のフェルマー点となるときを計算している。

$\boxed{2}$

次の文章を読み，下の問い (問 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

定義域が実数全体である関数 $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x$ の逆関数を $y = g(x)$ とする。

問 1　$g(8) = \boxed{17}$ であり，$g'(8) = \dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}\,\boxed{20}}$ である。

問 2　曲線 $y = g(x)$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標の値を小さい順に並べると，$\boxed{21}$，$\dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$，$\boxed{24}$ である。

問 3　曲線 $y = g(x)$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}\,\boxed{27}}$ である。

解答

問 1　$y = g(x) \iff x = 2y^3 - 3y^2 + 2y$ より，$x = 8$ のとき

$$8 = 2y^3 - 3y^2 + 2y \iff (y-2)(2y^2 + y + 4) = 0$$

したがって，

$$y(= g(8)) = \mathbf{2}$$

また，$x = 2y^3 - 3y^2 + 2y$ の両辺を x で微分すると

$$1 = \frac{dy}{dx}(6y^2 - 6y + 2) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6y^2 - 6y + 2}$$

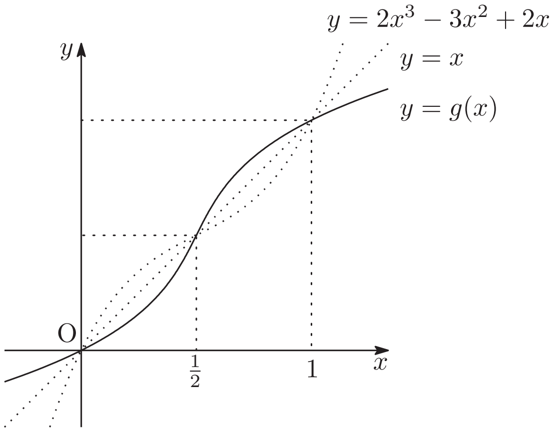
であるから，$y = g(x)$ は $x = 8$ のとき $y = 2$ より

$$g'(8) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2} = \frac{1}{6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}$$

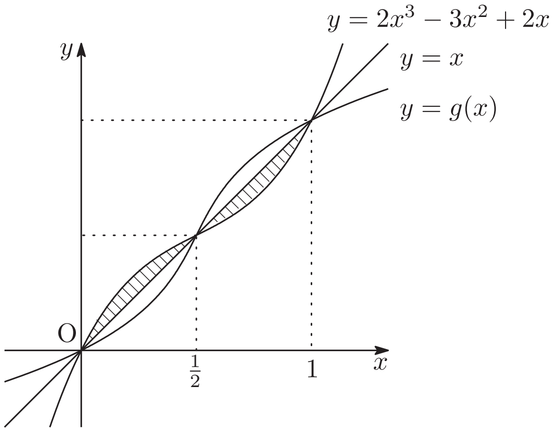
問 2　$y = g(x) \iff x = 2y^3 - 3y^2 + 2y$ と $y = x$ を連立して

$$x = 2x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$\iff x(2x-1)(x-1) = 0$$
$$\iff x = \mathbf{0},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{1}$$

問 3　$y = 2x^3 - 3x^2 + 2x$ と $y = g(x)$ のグラフが $y = x$ に関して対称であること，単調性を踏まえると，$y = g(x)$ のグラフは次の実線部分のようになる。



対称性を考えると，求める面積は下図の斜線部分の面積となるので，求める面積は



$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{(2x^3 - 3x^2 + 2x) - x\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{x - (2x^3 - 3x^2 + 2x)\}$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

$\boxed{3}$

次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

AB を底辺とする高さが 3 の平行四辺形 ABCD において，AB = 3，BC = 6，BC を 2 : 1 に内分する点を E，CD を 2 : 1 に内分する点を F とする。また，AC と EF の交点を G，AD の延長と EF の延長の交点を H とする。

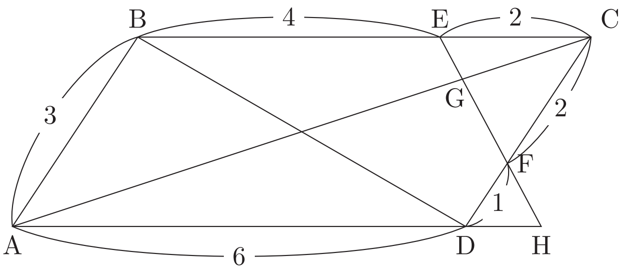
問 1　$\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である。

問 2　$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}} = \dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ である。

問 3　$\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}} = \dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$ である。

問 4　△CFG の面積は $\dfrac{\boxed{34}\,\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。

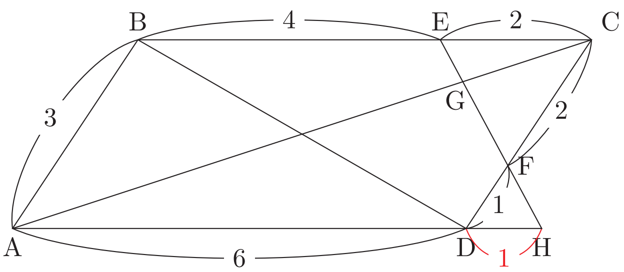
解答



※ 紙面の都合上 AD を下に取っているが，問題文中では「AB を底辺としたとき高さが 5」と書いてある。問 4 で面積を求める際，6×5 と計算しないように注意したい。

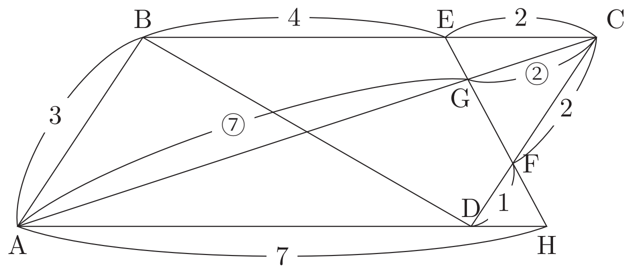
問 1　△FHD と △FEC は相似なので，HD : EC = FD : FC = 1 : 2 である。

$2\mathrm{HD} = \mathrm{EC}$ より $\mathrm{HD} = 1$ である。こうして $\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ である。



問 2　△GAH と △GCE は相似なので，AG : CG = AH : CE = 7 : 2 である。

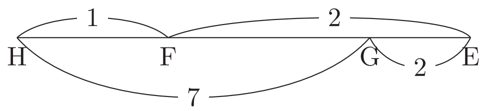
よって $\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{AG}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$ である。



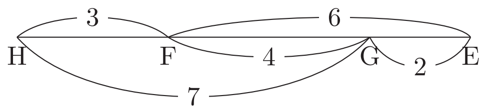
問 3　$\triangle$FHD と $\triangle$FEC は相似なので，$\mathrm{HF}:\mathrm{EF}=1:2$　$\cdots$① である。

また問 2 より $\mathrm{AH}:\mathrm{CE}=7:2$　$\cdots$② である。

① , ② より



$\Downarrow$



$$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{GF}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$ である。

問 4

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CFG}&=\triangle\mathrm{ACD}\times\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}\times\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{AC}}\\&=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}\\&=\boldsymbol{\frac{10}{9}}\end{aligned}$$

4

次の文章を読み，下の問い (問 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

日本には十干十二支 (じっかんじゅうにし) で暦を表す方法がある。十干は甲 (きのえ)，乙 (きのと)，丙 (ひのえ)，丁 (ひのと)，戊 (つちのえ)，己 (つちのと)，庚 (かのえ)，辛 (かのと)，壬 (みずのえ)，癸 (みずのと) の順に全部で 10 種類あり，表にすると

十干

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
種類	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸

である。また，十二支は子 (ね)，丑 (うし)，寅 (とら)，卯 (う)，辰 (たつ)，巳 (み)，午 (うま)，未 (ひつじ)，申 (さる)，酉 (とり)，戌 (いぬ)，亥 (い) の順に全部で 12 種類があり，表にすると

十二支

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
種類	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥

である。

十干と十二支を組み合わせて年を表す方法は次のようになる。西暦 2022 年は十干十二支で表すと「壬寅」の年で，西暦 2023 年は十干と十二支が 1 つずつ進み，「癸卯」の年になる。十干も十二支も最後まで行くと次は最初に戻る。したがって西暦 2024 年は十干が最初に戻って「甲辰」の年になる。以下では，十干十二支と西暦の関係について，このルールが例外なく適用できるものとする。

問 1 「甲子」の年から数えて最初の「乙卯」の年は $\boxed{37}\ \boxed{38}$ 年後である。

問 2 大化の改新が始まったとされる年 (西暦 645 年) に一番近い年は西暦 $\boxed{39}\ \boxed{40}\ \boxed{41}$ 年である。

解答

問 1 $n=1$ のとき「甲子」として，n 年目の十干の順番を a，十二支の順番を b とすると，

$$\begin{cases} n \equiv a & \pmod{10} \\ n \equiv b & \pmod{12} \end{cases}$$

が成り立つ。

最初の「乙卯」が何年目かを求めるためには

$$\begin{cases} n \equiv 2 & \pmod{10} \quad \cdots\cdots ① \\ n \equiv 4 & \pmod{12} \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

なる最小の正の整数 n を求めればよい。

①，②より

$$n = 10x + 2 = 12y + 4 \qquad (x,\ y \text{ は整数})$$

$$10m - 12n = 2$$

$$5x - 6y = 1$$

$$5(x+1) - 6(y+1) = 0$$

$$\therefore\ 5(x+1) = 6(y+1)$$

が成り立ち，5 と 6 は互いに素であるから，

$$\begin{cases} x+1=6k \\ y+1=5k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=6k-1 \\ y=5k-1 \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

① (または②) に代入して

$$n=10(6k-1)+2=60k-8$$

となるので，これを満たす正の整数 n は，$k=1$ のときの $n=52$

よって，「甲子」の年 $n=1$ から数えて

$$52-1=\mathbf{51}\ \textbf{年後}$$

問 2　$2022 \equiv 2 \pmod{10}$，$2022 \equiv 6 \pmod{12}$ であり，

西暦 2022 年 ($m=2022$) のときに「壬寅」であることを踏まえると，

西暦 m 年の十干の順番を a，十二支の順番を b として

$$\begin{cases} m \equiv a-7 \pmod{10} \\ m \equiv b+3 \pmod{12} \end{cases}$$

となっていることがわかる。

西暦 m 年に「甲子」($a=1,\ b=1$) となる条件は

$$\begin{cases} m \equiv -6 \pmod{10} \\ m \equiv 4 \pmod{12} \end{cases}$$

であるから，

$$m=10x-6=12y+4 \qquad (x,\ y \text{ は整数}) \cdots\cdots ③$$

$$10x-12y=-2$$

$$5x-6y=-1$$

$$5(x-1)-6(y-1)=0$$

$$\therefore \quad 5(x-1)=6(y-1)$$

が成り立ち，5 と 6 は互いに素であるから，

$$\begin{cases} x-1=6k \\ y-1=5k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=6k+1 \\ y=5k+1 \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

③ (または④) に代入して

$$m=60k+4$$

この m のうち，645 に最も近いのは $k=11$ のときの $\boldsymbol{m=664}$

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合］(標準)

(1) $\sin\dfrac{5}{12}\pi$ を解とする 4 次方程式，(2) 線分の和の最小値に関する出題であった。前期より解きにくく，戸惑った受験生も多いと考えられる。

$\boxed{2}$ ［数III微分法，積分法］（やや難）

逆関数に関する出題であった。不慣れな受験生も多いと考えられ，やりにくかったのではないか。

$\boxed{3}$ ［図形の性質］（やや易）

平行四辺形の初等幾何に関する出題であった。高校受験にもよく見られる出題で，初等幾何に関する経験の差が出る問題であった。

$\boxed{4}$ ［整数の性質］（標準）

十干十二支に関する出題で，本学にはよくある文章題の出題であった。地道に数えてもよいし，式を立てて解いてもよいだろう。

例年並みの難易度であったが，全体的に取り組みにくいセットであった。$\boxed{3}$をしっかりと完答し，他で半分以上は得点したい。一次突破ラインは 60～65% 程度か。