日本大学医学部 N方式（Ⅱ期）二次試験　数学

2023年 3月17日実施

［ Ⅰ ］

次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)^5 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin x \cos x dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{\log 2} e^{5x} dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2+10x+26}{x+5} dx$

解答

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)^5 dx &= \left[\frac{(3x-2)^6}{6\cdot 3}\right]_0^{\frac{2}{3}} \\ &= -\mathbf{\frac{32}{9}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 2x}{2} dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{12}} \\ &= -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0\right) \\ &= \mathbf{\frac{2-\sqrt{3}}{8}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_1^{\log 2} e^{5x} dx &= \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\log 2} \\ &= \mathbf{\frac{32-e^5}{5}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2+10x+26}{x+5}\,dx &= \int_0^1 \frac{(x+5)^2+1}{x+5}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(x+5+\frac{1}{x+5} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + 5x + \log|x+5| \right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{11}{2} + \log\frac{6}{5}}
\end{aligned}$$

［ II ］

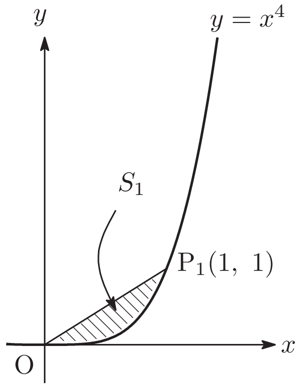
曲線 $y = x^4$ 上の点列 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$，$\cdots\cdots$ を考える。ただし，$1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n \cdots$ とする。原点を O として，線分 OP_1 と曲線の弧 OP_1 とで囲まれる部分の面積を S_1 とし，また，線分 OP_{n-1} と線分 OP_n と曲線の弧 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ とで囲まれる部分の面積を S_n $(n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。以下の問いに答えなさい。

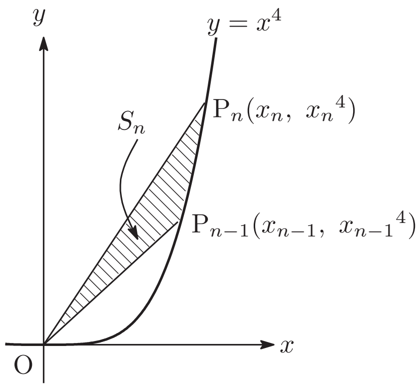
(1)　S_1 を求めなさい。

(2)　$n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，S_n を x_n と x_{n-1} を用いて表しなさい。

(3)　$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots\cdots$ が公比 $\dfrac{31}{32}$ の等比数列になっているとする。n が限りなく大きくなるとき，点 P_n はある点に限りなく近づくが，その点の座標を求めなさい。

解答





(1)　$x_1 = 1$ より，$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ であるから，直線 OP_1 の方程式は

$$y = x$$

である。
よって，

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (x - x^4)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

(2)　直線 OP_n の方程式は

$$y = \frac{{x_n}^4}{x_n}x$$

$$\therefore y = {x_n}^3 x$$

であり，同様に，直線 OP_{n-1} の方程式は

$$y = {x_{n-1}}^3 x$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{x_n} ({x_n}^3 x - x^4)dx - \int_0^{x_{n-1}} ({x_{n-1}}^3 x - x^4)dx \\ &= \left[{x_n}^3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{x_n} - \left[{x_{n-1}}^3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{x_{n-1}} \\ &= \frac{3}{10}{x_n}^5 - \frac{3}{10}{x_{n-1}}^5 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{10}({x_n}^5 - {x_{n-1}}^5)} \end{aligned}$$

(3)　$\{S_n\}$ は初項が $\dfrac{3}{10}$，公比が $\dfrac{31}{32}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{3}{10}\left(\frac{31}{32}\right)^{n-1}$$

である。(2) の結果を代入して

$$\frac{3}{10}({x_n}^5 - {x_{n-1}}^5) = \frac{3}{10}\left(\frac{31}{32}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \ {x_n}^5 - {x_{n-1}}^5 = \left(\frac{31}{32}\right)^{n-1} \qquad (n \geqq 2)$$

したがって，$n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} {x_n}^5 &= {x_1}^5 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{31}{32}\right)^k \\ &= 1^5 + \frac{31}{32} \cdot \frac{1 - \left(\frac{31}{32}\right)^{n-1}}{1 - \frac{31}{32}} \\ &= 32 - 31\left(\frac{31}{32}\right)^{n-1} \\ \therefore\ \ x_n &= \sqrt[5]{32 - 31\left(\frac{31}{32}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[5]{32} = 2$$

ゆえに，点 P_n は $n \to \infty$ とするとき点 **(2，16)** に近づく。

[Ⅲ]

原点 O の座標平面上に楕円 $C : \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ および直線 $\ell : y=-2x+k$ がある。このとき，以下の問いに答えなさい。

(1)　C と ℓ が共有点をもつときの k の取り得る値の範囲を求めなさい。

　(1) で求めた範囲のうち，k の最大値を Max，最小値を Min で表すこととする。また，$k=\mathrm{Max}$ となるときの共有点を A で表す。

(2)　$\mathrm{Min}<k<\mathrm{Max}$ を満たす k に対して，C と ℓ の 2 つの交点の中点を P とする。さらに，点 P を通り ℓ に垂直な直線が C と交わる 2 点の中点を Q とする。P，Q の座標を k を用いて表しなさい。

(3)　(2) の P，Q に対して，三角形 APQ を作り，その面積を S とする。S を k の式で表し，$0 \leqq k \leqq \mathrm{Max}$ の場合に S の最大値を求めなさい。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \iff 4x^2+9y^2-36=0$

に $y=-2x+k$ を代入して

$$40x^2-36kx+9k^2-36=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を得る。x の 2 次方程式①が実数解をもつ k の取りうる値の範囲を求める。①の判別式を D として

$$\begin{aligned} D/4 \geqq 0 &\iff (18k)^2-40\cdot\left(9k^2-36\right) \geqq 0 \\ &\iff k^2-40 \leqq 0 \\ &\iff (k+2\sqrt{10})(k-2\sqrt{10}) \leqq 0 \\ &\iff \boldsymbol{-2\sqrt{10} \leqq k \leqq 2\sqrt{10}} \end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{Min}=-2\sqrt{10}$，$\mathrm{Max}=2\sqrt{10}$ であることから，$-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$ において ① の相異なる 2 解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=\frac{9k}{10} \quad (\because \text{解と係数の関係})$$

よって，P の x 座標は　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{9k}{20}$

P は直線 $y=-2x+k$ 上にあることから

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{9}{20}k},\ \boldsymbol{\frac{k}{10}}\right)$$

点 P を通って，直線 ℓ に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{k}{8} \iff x=2y+\frac{k}{4}$$

これを $4x^2+9y^2-36=0$ に代入して整理すると

$$25y^2+4ky+\frac{k^2}{4}-36=0 \quad \cdots\cdots ②$$

y の 2 次方程式 ② の相異なる 2 解を γ, δ として解と係数の関係を考えると

$$\gamma+\delta=-\frac{4k}{25}$$

Q は直線 $x=2y+\dfrac{k}{4}$ 上にあることから

$$\mathbf{Q}\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{100}}\boldsymbol{k},\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{25}}\boldsymbol{k}\right)$$

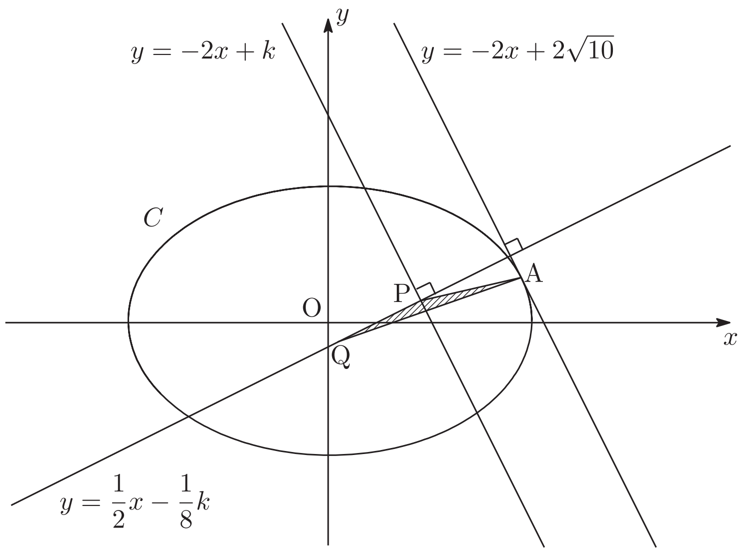
(3)　①に $k=\mathrm{Max}=2\sqrt{10}$ を代入して

$$10x^2-18\sqrt{10}x+81=0 \iff (\sqrt{10}x-9)^2=0$$

よって，点 A の x 座標は $\dfrac{9}{\sqrt{10}}$ であるから

$$\mathrm{A}\left(\frac{9\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

ここで，$\mathrm{P}\left(\dfrac{9k}{20},\ \dfrac{k}{10}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{9k}{100},\ -\dfrac{2k}{25}\right)$ であり，直線 PQ の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であることに注意して



$$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{9k}{100}-\frac{9k}{20}\right|=\frac{9\sqrt{5}}{50}|k|$$

また，△APQ の底辺を PQ とみたときの高さを h とすると，
h は $\mathrm{A}\left(\dfrac{9\sqrt{10}}{10},\ \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ と直線 PQ: $x-2y-\dfrac{k}{4}=0$ との距離になるので

$$h=\frac{\left|\dfrac{9}{10}\sqrt{10}-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}-\dfrac{k}{4}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{4\sqrt{5}}|2\sqrt{10}-k|$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{PQ}\times h=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{400}}|\boldsymbol{k}(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{10}}-\boldsymbol{k})|$$

ここで，$0\leqq k\leqq 2\sqrt{10}$ より，$S=\dfrac{9}{400}k(2\sqrt{10}-k)$ と表せる。S が最大となる k の値は $k=\sqrt{10}$ であり，S の最大値は

$$\frac{9}{400}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{40}}$$

講評

［Ⅰ］［数Ⅲ積分法］(易)
基礎的な積分計算からの出題であった。この計算は 1 つも落としてはいけない。

［Ⅱ］［数列，極限］（やや易）
点列の極限からの出題であった。丁寧に計算を進めていけばよい。階差型の漸化式の計算には注意したい。

［Ⅲ］［2 次曲線］（標準）
楕円と直線の共有点に関連する問題からの出題であった。計算量がやや多いが，難しい考え方を用いる問題ではない。(3) 以外は間違わずに解きたい。

昨年度の N2 とはほぼ同程度の難易度，今年度の N1 と比べると難易度は下がった。時間も十分にあることを考えると，正規合格には 50 点/60 点は必要だろう。