解答速報

日本大学医学部 N方式（Ⅱ期）　数学

2023年 3月4日実施

I

(1)　a を実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2+4ax=x+4a$ が重解をもつとき，$a=\dfrac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}}$ であり，重解は，$x=\boxed{4}$ である。

(2)　円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ と直線 $x-y-1=0$ の 2 つの交点を A，B とするとき，$\mathrm{AB}=\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}$ である。

(3)　$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。6^{20} は $\boxed{7}\boxed{8}$ 桁の整数である。

(4)　a, b を実数，i を虚数単位とする。2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の 1 つが $x=-2+i$ であるとき，$a=\boxed{9}$, $b=\boxed{10}$ である。

(5)　x, y が不等式 $(x-1)^2+(y+2)^2\leqq 5$ を満たすとき，$(x-4)^2+(y-4)^2$ の最小値は $\boxed{11}\boxed{12}$ である。

解答

(1)　与式を整理すると $x^2+(4a-1)x-4a=0$ である。判別式を D とすると，$D=0$ のとき重解を持つ。
$D=(4a-1)^2-16a=16a^2+8a+1=(4a+1)^2$ より $D=0$ となるのは $a=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ のときであり，このとき重解は $-\dfrac{4a-1}{2}=\mathbf{1}$ である。

(2)　円の中心 (1, 2) と直線 $x-y-1=0$ の距離を d とおくと，$\mathrm{AB}=2\sqrt{9-d^2}$ である。
点と直線の距離の公式より

$$d=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

である。よって $\mathrm{AB}=2\sqrt{9-2}=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$ である。

(3)

$$\begin{aligned}\log_{10}6^{20}&=20\log_{10}6\\&=20(\log_{10}2+\log_{10}3)\\&=20\times 0.7781\\&=15.562\end{aligned}$$

であるため $6^{20}=10^{15.562\cdots}$ である。よって 6^{20} は $\mathbf{16}$ 桁である。

(4)　与式は実数係数の 2 次方程式であるから，もう 1 つの解は $-2+i$ の共役複素数より $-2-i$ である。解と係数の関係から

$$a = -\{(-2+i)+(-2-i)\} = \mathbf{4}$$

$$b = (-2+i)(-2-i) = \mathbf{5}$$

である。

(5)　2 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$，$(x-4)^2+(y-4)^2=r^2$ が共有点を持つ r の範囲を求める。2 円の中心の距離は $\sqrt{(-1+4)^2+(2+4)^2}=3\sqrt{5}$ である。2 円が共有点を持つ条件は $r-\sqrt{5} \leqq 3\sqrt{5} \leqq r+\sqrt{5}$，すなわち $2\sqrt{5} \leqq r \leqq 4\sqrt{5}$ のときである。よって $(x-4)^2+(y-4)^2$ の最小値は $(2\sqrt{5})^2=\mathbf{20}$ である。

Ⅱ

A，B の 2 人がじゃんけんを 5 回行う。ただし，あいこも 1 回と数えるものとする。

(1)　あいこの回数がちょうど 3 回となる確率は $\dfrac{\boxed{13}\ \boxed{14}}{\boxed{15}\ \boxed{16}\ \boxed{17}}$ である。

(2)　あいこがちょうど 3 回連続する確率は $\dfrac{\boxed{18}\ \boxed{19}}{\boxed{20}\ \boxed{21}\ \boxed{22}}$ である。

解答

(1)　A，B の手の出し方は $3 \times 3 = 9$ 通りである。そのうち，あいこになるのは 2 人が同じ手を出したときで 3 通り。よって，あいこになる確率は $\dfrac{1}{3}$ である。ゆえに，あいこがちょうど 3 回になる確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{40}{243}} $$

である。

(2)　あいこがちょうど 3 回出たとする。1 回目〜3 回目があいこの場合，2 回目〜4 回目があいこの場合，3 回目〜5 回目があいこの場合のときにあいこが 3 回連続する。このときの確率は $3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{12}{243}$ である。

あいこがちょうど 4 回出たとする。1 回目〜3 回目と 5 回目があいこの場合と 1 回目と 3 回目〜5 回目があいこの場合にあいこが 3 回連続する。このときの確率は $2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{4}{243}$ である。

以上より，あいこが 3 回連続する確率は $\mathbf{\dfrac{16}{243}}$ となる。

Ⅲ

$0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ について考える。

(1)　$f(x)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}}{\boxed{25}}$ であり，最小値は $-\sqrt{\boxed{26}}$ である。

(2)　$f(x)$ が最小となるような x の値を x_m とするとき，$\sin 2x_m = \dfrac{\boxed{27}\,\boxed{28}\sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}\,\boxed{31}}$ である。

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sqrt{3}\cos x-\sin x\\
&= -\frac{1}{2}\sin x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x\\
&= \sqrt{7}\sin(x+\alpha)
\end{aligned}
$$

ただし α は $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ を満たす。

$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$ より $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ である。ゆえに $\dfrac{\pi}{2}<\alpha \leqq x+\alpha \leqq \pi+\alpha<2\pi$ となる。

$x+\alpha$ の範囲から $\sin(x+\alpha)$ は $x+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ のときに最小値，$x+\alpha=\alpha$ のときに最大値をとる。それぞれ計算すると

$$
\begin{aligned}
\text{最大値}:f(0) &= \sqrt{7}\sin\alpha\\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\\
\text{最小値}:f\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) &= \sqrt{7}\sin\frac{3}{2}\pi\\
&= \boldsymbol{-\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

である。

(2)

$$
\begin{aligned}
\sin 2x_m &= \sin 2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\\
&= \sin 2\alpha\\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\\
&= 2\cdot\frac{3\sqrt{21}}{14}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)\\
&= \boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{14}}
\end{aligned}
$$

Ⅳ

p は $0 < p < 1$ を満たす定数とする。△ABC の辺 AB を $p:(1-p)$ に内分する点を C_1，辺 BC を $p:(1-p)$ に内分する点を A_1，辺 CA を $p:(1-p)$ に内分する点を B_1 として $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ を作る。以下，n を自然数として，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ を $p:(1-p)$ に内分する点を C_{n+1}，辺 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ を $p:(1-p)$ に内分する点を A_{n+1}，辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$ を $p:(1-p)$ に内分する点を B_{n+1} として $\triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ を作る。△ABC の面積を S，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とする。

(1) $p = \dfrac{1}{2}$，$S = 4096$ のとき，$S_5 = \boxed{32}$ である。

(2) $p = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{\boxed{33}}{\boxed{34}}\left\{1-\left(\frac{\boxed{35}}{\boxed{36}}\right)^n\right\}S$ である。

(3) $p = \dfrac{\boxed{37} \pm \sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}\,\boxed{40}}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2}{3}S$ である。

解答

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} \\
&= \triangle \mathrm{A}_{n}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} + \triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n}\mathrm{C}_{n+1} \\
&\qquad + \triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n} + \triangle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} \\
&= p(1-p)S_n + p(1-p)S_n + p(1-p)S_n + S_{n+1} \\
\therefore\ S_{n+1} &= (1-3p+3p^2)S_n
\end{aligned}$$

と計算される。

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき $1-3p+3p^2 = \dfrac{1}{4}$ であるため

$$S_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 S = \frac{4096}{1024} = \mathbf{4}$$

である。

(2) $p = \dfrac{1}{3}$ のとき $1-3p+3p^2 = \dfrac{1}{3}$ であるため

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} S_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k S \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}S \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}S}
\end{aligned}$$

である。

(3) $0 < 1-3p+3p^2 < 1$ である。

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{(1-3p+3p^2)S}{1-(1-3p+3p^2)}$$

である。これが $\dfrac{2}{3}S$ になるのは

$$\frac{1-3p+3p^2}{1-(1-3p+3p^2)}=\frac{2}{3}$$

のときである。整理すると

$$5p^2-5p+1=0$$

となるため，これを解いて $p=\boldsymbol{\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}}$ を得る。（これは $0<p<1,\ 0<1-3p+3p^2<1$ を満たす。）

V

四面体 OABC において，辺 OA，OB，OC をそれぞれ 1 : 1，1 : 2，1 : 5 に内分する点を L，M，N とし，△LMN の重心を G とする。さらに，直線 OG と平面 ABC の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}\ \boxed{47}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。

(2) $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OG}} = \boxed{48}$ である。

(3) 四面体 OPAB，四面体 OPBC，四面体 OPCA の体積をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とすると，
$V_1 : V_2 : V_3 = \boxed{49} : \boxed{50} : \boxed{51}$ である。ただし，最も簡単な整数比で答えること。

解答

(1) 条件より $\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

である。

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

と表される。$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = 1$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となるため $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OG}} = \mathbf{3}$ である。

(3) 三角形 ABC を底面としたときの高さを h とすると $V_1 = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABP}\cdot h$, $V_2 = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BCP}\cdot h$, $V_3 = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{CAP}\cdot h$ であるため $\triangle\mathrm{ABP} : \triangle\mathrm{BCP} : \triangle\mathrm{CAP}$ を計算すればよい。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\end{aligned}$$

である。直線 AP と直線 BC の交点を D とおくと，上の式より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

である。これより $\dfrac{\triangle \mathrm{ABP}}{\triangle \mathrm{CAP}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = 2$ を得る。また

$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{BCP} &= \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}} \triangle \mathrm{ABC} \\
&= \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC} \\
\triangle \mathrm{CAP} &= \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \triangle \mathrm{ABC} \\
&= \frac{1}{3} \triangle \mathrm{ABC}
\end{aligned}
$$

となる。以上より

$$
\begin{aligned}
V_1 : V_2 : V_3 &= \triangle \mathrm{ABP} : \triangle \mathrm{BCP} : \triangle \mathrm{CAP} \\
&= \frac{1}{6} \triangle \mathrm{ABC} : \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC} : \frac{1}{3} \triangle \mathrm{ABC} \\
&= \frac{1}{6} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \\
&= \mathbf{1 : 3 : 2}
\end{aligned}
$$

である。

Ⅵ

関数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$ について考える。

(1) $f(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}}$ であり，極小値は $\dfrac{\boxed{54}\,\boxed{55}}{\boxed{56}}$ である。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{57}\log\boxed{58}+\dfrac{\sqrt{\boxed{59}}}{\boxed{60}}\pi-\boxed{61}$ である。ただし，log は自然対数を表す。

解答

(1) 微分する。

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x^2+3)-(x^2-3x)(\cdot 2x)}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{3(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

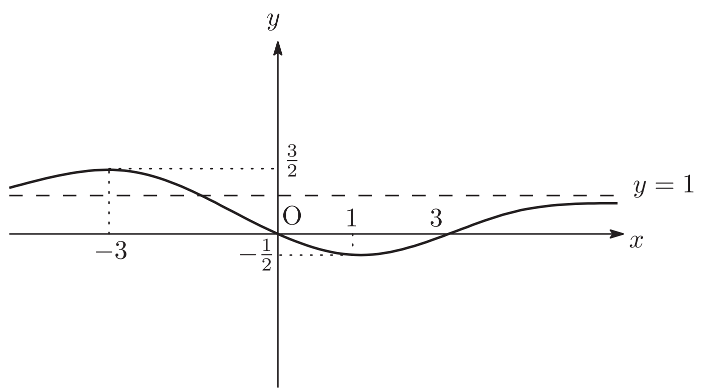
したがって，増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって

$$\text{極大値}: f(-3)=\mathbf{\frac{3}{2}},\ \text{極小値}: f(1)=\mathbf{\frac{-1}{2}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=1$ より，(1) の増減表と併せて，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



よって，求める面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^3 \left(-\frac{x^2-3x}{x^2+3}\right) dx \\
=&\int_0^3 \left(-1+\frac{3x+3}{x^2+3}\right) dx \\
=&\int_0^3 \left(-1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3}+\frac{3}{x^2+3}\right) dx \\
=&\Big[-x+\frac{3}{2}\log|x^2+3|\Big]_0^3+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta \\
&\qquad\qquad\qquad (\text{第 3 項は } x=\sqrt{3}\tan\theta \text{と置換した}) \\
=&-3+\frac{3}{2}(\log 12-\log 3)+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-0\right) \\
=&\boldsymbol{3\log 2+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3}
\end{aligned}
$$

講評

Ⅰ［小問集合］(易)
(1)2 次方程式，(2) 図形と方程式，(3) 常用対数，(4) 複素数と方程式，(5) 図形と方程式からの出題であった。どれも教科書例題レベルの問題であり，落とせない。

Ⅱ［確率］（やや易）
じゃんけん，反復試行の確率の問題であった。典型的な問題であるので，確実に得点したい。

Ⅲ［三角関数］（標準）
三角関数の最大値，最小値に関する典型問題。合成をして，丁寧に計算すればよい。

Ⅳ［数列，無限級数］（やや易）
三角形の面積に関する，数列・無限級数の問題であった。(3) は初項が S ではなく S_1 であることに注意。教科書傍用問題集にあるような問題で，特に難しい箇所はない。失点はできるだけ避けたい。

Ⅴ［空間ベクトル］（やや易）
四面体の重心，線分比，体積比を求める典型問題であった。教科書例題レベルの問題であるので，失点はできれば避けたい。

Ⅵ［微分法，積分法］（やや易）
分数関数に関する出題であった。(1) は微分して増減を調べる，(2) は面積を定積分によって求める問題で，どちらも教科書傍用問題集にあるような問題で，特に難しい箇所はない。失点はできるだけ避けたい。

I 期と比較すると，やや難易度は上がった。ただし，難しいところはなく高得点勝負になると考えられる。II 期の定員数も考えると，一次突破ラインは 80 % 程度か。