医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本大学医学部 N方式（Ⅰ期）二次試験　数学

2023年 2月11日実施

[1]

以下の問いに答えなさい．

(1)　方程式 $x^3+2x^2+3x+2=4x+4$ の解を求めなさい．

(2)　自然数 n が 4 の倍数でないならば，$f(n)=n^3+2n^2+3n+2$ は 4 の倍数であることを示しなさい．

解答

(1)　与式は $x=1$ で成立することに注意して

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &\iff x^3+2x^2-x-2=0\\ &\iff (x-1)(x^2+3x+2)=0\\ &\iff (x-1)(x+1)(x+2)=0\\ &\iff x=\mathbf{1},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{-2}\end{aligned}$$

(2)　(1) が誘導と考える．

$$f(n)\text{ は 4 の倍数である} \iff f(n)-(4n+4)=f(n)-4(n+1)\text{ は 4 の倍数である}$$

が言えるので，以下，$f(n)-(4n+4)$ が 4 の倍数であることを示す．
(1) より

$$f(n)-(4n+4)=(n-1)(n+1)(n+2)$$

である．n が 4 の倍数でないならば，法を 4 として，$n\equiv -1,\ 1,\ 2$ とでき，それぞれについて

$$f(n)-(4n+4)=(n-1)(n+1)(n+2)\equiv 0,\ 0,\ 12\equiv 0,\ 0,\ 0$$

となる．よって，$f(n)-(4n+4)$ が 4 の倍数であるから，題意は示された．

別解

n が 4 の倍数でないならば，以下，法を 4 として，$n\equiv -1,\ 1,\ 2$ とでき，それぞれについて

$$f(n)=n^3+2n^2+3n+2\equiv 0,\ 8,\ 24\equiv 0,\ 0,\ 0$$

となる．よって，$f(n)$ は 4 の倍数である．

[2]

a を $0 < a < 8$ を満たす定数とし，放物線 $P : y = ax^2 - ax + 2$ および双曲線 $H : y = \dfrac{4}{x} + 2a$ を考える．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　この放物線と双曲線は 1 点で交わるが，その交点の x 座標は a に依存しない．その交点の座標を求めなさい．

(1) で求めた交点を N とし，N における曲線 P の接線を ℓ，N における曲線 H の接線を m とする．

(2)　ℓ と m が垂直に交わるときの a の値を求めなさい．

(3)　直線 ℓ，m および x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ で表すとき，$S(a)$ を a の式で表し，$S(a)$ の最小値を求めなさい．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$y = ax^2 - ax + 2 (= f(x))$ と $y = \dfrac{4}{x} + 2a (= g(x))$ を連立して

$$\begin{aligned} ax^2 - ax + 2 = \frac{4}{x} + 2a &\iff ax^3 - ax^2 + 2x = 4 + 2ax \\ &\iff ax^3 - ax^2 + 2(1-a)x - 4 = 0 \\ &\iff (x-2)(ax^2 + ax + 2) = 0 \\ &\iff (x-2)\left\{a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a-8}{4}\right\} = 0 \end{aligned}$$

ここで，$0 < a < 8$ より，$a\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{a-8}{4} \fallingdotseq 0$ である．

したがって $x = 2$ より，求める交点の座標は

$$\boldsymbol{(2,\ 2a + 2)}$$

(2)　$f'(x) = 2ax - a$，$g'(x) = -\dfrac{4}{x^2}$ である．2 接線が直交することより

$$f'(2) \cdot g'(2) = -1 \iff 3a \cdot (-1) = -1 \iff a = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(3)　接線 ℓ は

$$y = f'(2)(x-2) + 2a + 2 = 3ax - 4a + 2$$

より，x 軸との交点は $\left(\dfrac{4a-2}{3a},\ 0\right)$ である．

接線 m は

$$y = g'(2)(x-2) + 2a + 2 = -x + 2a + 4$$

より，x 軸との交点は $(2a + 4,\ 0)$ である．

$0<a<8$ のとき，$(2a+4)-\dfrac{4a-2}{3a}=\dfrac{6a^2+8a+2}{3a}>0$ であることに注意して

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2}\left\{(2a+4)-\frac{4a-2}{3a}\right\}(2a+2) \\ &= \frac{6a^2+8a+2}{3a}(a+1) \\ &= \frac{2(a+1)^2(3a+1)}{3a} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{\{(a+1)^2(3a+1)\}'\cdot a-(a+1)^2(3a+1)(a)'}{a^2} \\ &= \frac{2(a+1)(2a+1)(3a-1)}{3a^2} \end{aligned}$$

となるから，$S(a)$ $(0<a<8)$ の増減は次のようになる．

a	0		$\frac{1}{3}$		8
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{64}{9}$	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{64}{9}}$ $\left(a=\dfrac{1}{3}\right)$ である．

[3]

原点 O の座標平面上に，曲線 $H:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$，(ただし，$x \geqq 2$) がある．H 上の点 P を $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と極座標表示して，P と $\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ を満たす点 Q を H 上に取れる場合を考える．以下の問いに答えなさい．

(1)　Q が H 上に取れるための P の x 座標の取り得る値の範囲を求めなさい．

(2)　x が (1) で求めた範囲にあるとき，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ は一定の値をとることを示し，その値を求めなさい．

(3)　x が (1) で求めた範囲にあるとき，PQ の最小値を求めなさい．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　曲線 H の漸近線は $y=\pm\dfrac{3}{2}x$ であり，これらと直交する直線は $y=\mp\dfrac{2}{3}x$ (複号同順) である．

$y=\dfrac{2}{3}x$ と曲線 $H:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の共有点の x 座標を求めると $x=\dfrac{18}{\sqrt{65}}$ となる．

よって，P の x 座標の取り得る値の範囲は

$$\boldsymbol{x>\frac{18}{\sqrt{65}}}$$

(2)　$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ を $H:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ に代入して，r^2 について解くと

$$r^2=\frac{36}{9-13\sin^2\theta}\quad\cdots\cdots ①$$

である．ここで，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ より $\mathrm{P}(r_1,\ \theta)$ とすると $\mathrm{Q}\left(r_2,\ \theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ とでき，ともに①上にあることから

$$r_1{}^2=\frac{36}{9-13\sin^2\theta},\ r_2{}^2=\frac{36}{9-13\sin^2(\theta\pm\frac{\pi}{2})}\left(=\frac{36}{9-13\cos^2\theta}\right)$$

である．よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}&=\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}\\&=\frac{9-13\sin^2\theta}{36}+\frac{9-13\cos^2\theta}{36}\\&=\frac{18-13(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{36}\\&=\frac{5}{36}\end{aligned}$$

となり，一定となる．また，その値は $\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$ である．

(3)　$\mathrm{PQ}^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2$ であり，(2) より $\dfrac{1}{{r_1}^2} + \dfrac{1}{{r_2}^2} = \dfrac{5}{36} \iff {r_1}^2 + {r_2}^2 = \dfrac{5}{36}{r_1}^2{r_2}^2$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \frac{5}{36}{r_1}^2{r_2}^2 \\ &= \frac{5}{36}\cdot\frac{36}{9-13\sin^2\theta}\cdot\frac{36}{9-13\cos^2\theta} \\ &= \frac{180}{81-117(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+169\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ &= \frac{180}{-36+\frac{169}{4}\sin^2 2\theta}\end{aligned}$$

$\mathrm{PQ}^2 > 0$ を踏まえると，$-36 + \frac{169}{4}\sin^2 2\theta > 0$ であるから，$-36 + \frac{169}{4}\sin^2 2\theta$ が最大となるとき PQ^2，すなわち PQ は最小となる．

ここで，P の存在範囲を考える．α を $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす角，β を $\tan\beta = \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{\pi}{4} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす角とすると，$\alpha < \theta < \beta$ としても一般性を失わない．

このとき，$2\alpha < 2\theta < 2\beta$ となり，$0 < 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < 2\beta < \pi$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を取り得る．

よって，$-36 + \frac{169}{4}\sin^2 2\theta$ は $\sin^2 2\theta = 1$ のとき最大で，その値は $\dfrac{25}{4}$ である．

したがって，求める PQ (> 0) の最小値は

$$\sqrt{\frac{180}{\frac{25}{4}}} = \boldsymbol{\frac{12}{\sqrt{5}}}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

途中 $\dfrac{5}{36}\cdot\dfrac{36}{9-13\sin^2\theta}\cdot\dfrac{36}{9-13\cos^2\theta}$ において，$\sin^2\theta = t$ とおくと $\cos^2\theta = 1-t$ となる．代入して

$$\frac{5}{36}\cdot\frac{36}{9-13t}\cdot\frac{36}{9-13(1-t)} = \frac{180}{(9-13t)(13t-4)}$$

となるので，分母について t の 2 次関数を考えるなどしてもよい．

講評

［１］［小問集合］(易)

(1) は 3 次方程式の解を求めるだけの問題である．(2) は合同式を使うと計算が簡単になる．昨年と同様に教科書基礎レベルの問題であり，失点は避けたい．

［２］［数III微分法］（やや易）

(1)(2) は基礎的な問題であり，どちらも落とせない．(3) だけ計算量がやや多いため，ここを正確に解くことができるかがポイントであった．

［３］［2 次曲線］（標準）

極方程式と双曲線に関する有名問題である．(1) は計算量を減らすために図形的に考えるのが良いだろう．(2) は双曲線を極方程式で表すことで証明は容易となる．(3) は三平方の定理に気づき，(2) を利用して正解したい．極方程式に関する有名問題の経験の有無が差を生みそうである．

昨年度と同様，大問 3 つの構成であった．大問 2 と大問 3 は数III微分法と 2 次曲線に関する問題であり，昨年度と似たような問題構成になっている．応用力よりも堅実な計算がしっかりとできるか，各単元の基本的な知識が正確に身に付いているかを問う内容になっている．正規合格ラインは 60 点満点中 45〜50 点程度か.