

日本大学医学部 N方式(I期) 数学

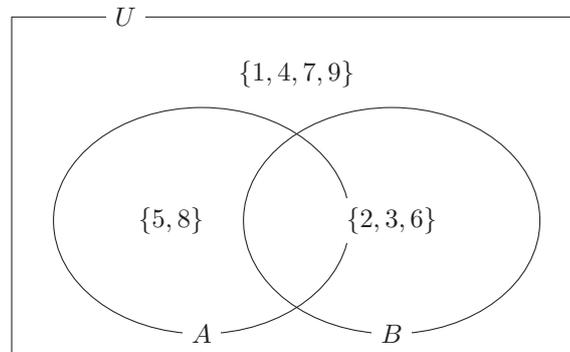
2023年 2月1日実施

I

- (1) $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 9, x \text{ は整数}\}$ を全体集合とする。 U の部分集合 A, B について、 $\overline{A \cap B} = \{1, 4, 7, 9\}$, $\overline{A \cup B} = \{5, 8\}$ であるとき、 B の要素のうち最大の数は である。
- (2) 方程式 $x^2 - |x| - 6 = 0$ の解は $x =$, である。
- (3) 方程式 $2x + 11y = 5$ を満たす整数 x, y のうち、 $100 < x + y < 500$ を満たす組は 組ある。
- (4) 点 $(3, 1)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 5$ に接する直線のうち、傾きが正であるものの方程式は $y =$ $x -$ である。
- (5) $2^x = 4^y = 5^z = 10$ のとき、 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} =$ である。

解答

- (1) 以下のベン図より **6** が答えである。



別解

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$ である。これを踏まえ

$$\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A \cup B}) = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

を得る。よって $B = \{2, 3, 6\}$ であるため、求める答えは **6** である。

- (2) $x \geq 0$ のとき $x^2 - x - 6 = 0$ である。これを解くと $x = 3, -2$ である。 $x \geq 0$ より $x = 3$ を得る。
 $x < 0$ のとき $x^2 + x - 6 = 0$ である。これを解くと $x = -3, 2$ である。 $x < 0$ より $x = -3$ を得る。
 こうして解は $x = -3, 3$ となる。

別解

$x^2 = |x|^2$ であることに注意して

$$\begin{aligned} x^2 - |x| - 6 &= 0 \\ \iff |x|^2 - |x| - 6 &= 0 \\ \iff (|x| + 2)(|x| - 3) &= 0 \\ \iff |x| = 3 \quad (\because |x| \geq 0) \\ \iff x = \pm 3. \end{aligned}$$

- (3) 方程式 $2x + 11y = 5$ は特殊解 $(x, y) = (8, -1)$ を持つため, k を整数としたとき, 一般解は $(x, y) = (11k + 8, -2k - 1)$ と計算される。

$x + y = 9k + 7$ を $100 < x + y < 500$ に代入すると

$$100 < 9k + 7 < 500.$$

これを解くと $\frac{93}{9} (= 10.\dots) < k < \frac{493}{9} (= 54.\dots)$ より $11 \leq k \leq 54$ である。よって, 求める答えは $54 - 11 + 1 = 44$ である。

- (4) (点 $(3, 1)$ を通り x 軸に垂直な直線は $x^2 + y^2 = 5$ に接することはないので,)

点 $(3, 1)$ を通る接線の傾きを m ($m > 0$) とすると, $y = m(x - 3) + 1 \iff mx - y - 3m + 1 = 0$ となる。

この直線と円の中心 $(0, 0)$ との距離が円の半径 $\sqrt{5}$ となるので

$$\frac{|-3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}.$$

これを解くと, $m = 2, -\frac{1}{2}$ となり, $m > 0$ より $m = 2$ を得る。よって, 求める接線の方程式は

$$y = 2(x - 3) + 1 \iff \mathbf{y = 2x - 5}.$$

- (5) $2^x = 4^y = 5^z = 10$ から $x = \log_2 10, y = \log_4 10, z = \log_5 10$ である。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{\log_2 10} - \frac{1}{\log_4 10} - \frac{1}{\log_5 10} \\ &= \log_{10} 2 - \log_{10} 4 - \log_{10} 5 = -1. \end{aligned}$$

II

複素数 z は $z + \bar{z} = -4$, $|z + 6| = 2\sqrt{7}$ を満たすとする。ただし, \bar{z} は z の共役な複素数である。

- (1) i を虚数単位とする。 $z = \boxed{11} \boxed{12} \pm \boxed{13} \sqrt{\boxed{14}} i$ である。
 (2) z^n が実数になるような最小の自然数 n の値は $\boxed{15}$ であり, そのときの z^n の値は $\boxed{15} \boxed{16}$ である。

解答

- (1) $|z + 6| = 2\sqrt{7}$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} |z + 6|^2 = 28 &\iff z\bar{z} + 6(z + \bar{z}) + 36 = 28 \\ &\iff z\bar{z} = 16 \end{aligned}$$

よって, $\begin{cases} z + \bar{z} = -4 \\ z\bar{z} = 16 \end{cases}$ から, z と \bar{z} を解にもつ x の 2 次方程式を考えると

$$x^2 + 4x + 16 = 0 \iff x = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

ゆえに, $z = -2 \pm 2\sqrt{3}i$

- (2) z を極形式で表すと

$$z = 4 \left\{ \cos \left(\pm \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\pm \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \quad (\text{複号同順})$$

よって, ド・モアブルの定理から

$$z^n = 4^n \left\{ \cos \left(\pm \frac{2}{3}n\pi \right) + i \sin \left(\pm \frac{2}{3}n\pi \right) \right\} \quad (\text{複号同順})$$

ゆえに, z^n が初めて実数になるのは $n = 3$ のときである。このとき,

$$z^3 = 4^3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \mathbf{64}$$

III

2つ箱 A, B があり, A には赤球 3 個, 白球 5 個, B には赤球 4 個, 白球 5 個が入っている。まず, A または B の箱を選び, 選んだ箱から球を 2 個取り出す。ただし, A, B の箱を選ぶ事象は同様に確からしいとし, また, 1 個の球を取り出す事象はどれも同様に確からしいとする。

(1) 取り出された球が 2 個とも赤球である確率は $\frac{\boxed{18} \quad \boxed{19}}{\boxed{20} \quad \boxed{21} \quad \boxed{22}}$ である。

(2) 取り出された球が 2 個とも赤球であるとき, それらが A の箱から取り出された球である条件付き確率は, $\frac{\boxed{23}}{\boxed{24} \quad \boxed{25}}$ である。

解答

(1) 箱 A から赤球が 2 個取り出される確率を $P(A)$, 箱 B から赤球が 2 個取り出される確率を $P(B)$ とすると

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{28} \\ P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \end{cases}$$

箱 A から赤球が 2 個取り出される事象と箱 B から赤球が 2 個取り出される事象は排反であることから, 求める確率は

$$P(A) + P(B) = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{168}}$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} \frac{(\text{箱 A から赤球が 2 個取り出される確率})}{(\text{取り出された球が 2 個とも赤球である確率})} &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} \\ &= \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{23}} \end{aligned}$$

IV

平行六面体 OABC-DEFG において、辺 OC の中点を H、辺 DG を 3 : 1 に内分する点を I、辺 EF と平面 AHI の交点を平面 J、対角線 OF と平面 ADH および AHI の交点をそれぞれ P、Q とする。

(1) $\frac{OP}{OF} = \frac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$ である。

(2) $\triangle AEJ$ および平行四辺形 ABFE の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると、 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である。

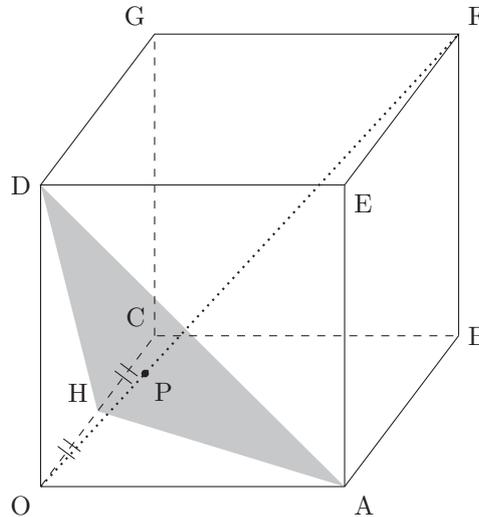
(3) OP : PQ : QF を最も簡単な整数比で表すと、 $\boxed{30} : \boxed{31} : \boxed{32}$ である。

解答

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OD} = \vec{d}$ とおく。

このとき $\vec{OF} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{OI} = \vec{OD} + \frac{3}{4}\vec{DG} = \frac{3}{4}\vec{c} + \vec{d}$ である。

(1)



P は直線 OF 上にあるため、ある実数 r を用いて

$$\vec{OP} = r\vec{OF} = r\vec{a} + r\vec{c} + r\vec{d}$$

と表される。

一方 P は平面 ADH 上にあるため、ある実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= s\vec{OA} + t\vec{OH} + (1-s-t)\vec{OD} \\ &= s\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{c} + (1-s-t)\vec{d} \end{aligned}$$

と表される。

係数を比較すると

$$\begin{cases} r = s \\ r = \frac{1}{2}t \\ r = 1 - s - t \end{cases}$$

である。これを解くと $r = \frac{1}{4}$ を得る。 $r = \frac{OP}{OF}$ であるため $\frac{OP}{OF} = \frac{1}{4}$ となる。

(2) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot EJ}{AE \cdot EF} = \frac{EJ}{2EF}$ であるため、 $\frac{EJ}{EF}$ を求めればよい。 $u = \frac{EJ}{EF}$ とおく。

平面 AHI による平行六面体の切断面は平行四辺形であるため、 $\vec{HI} = \vec{AJ}$ である。
 \vec{AJ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表すと、

$$\begin{aligned}\vec{AJ} &= \vec{AE} + \vec{EJ} \\ &= \vec{AE} + u\vec{EF} \\ &= \vec{OD} + u\vec{OC} \\ &= u\vec{d} + \vec{c}\end{aligned}$$

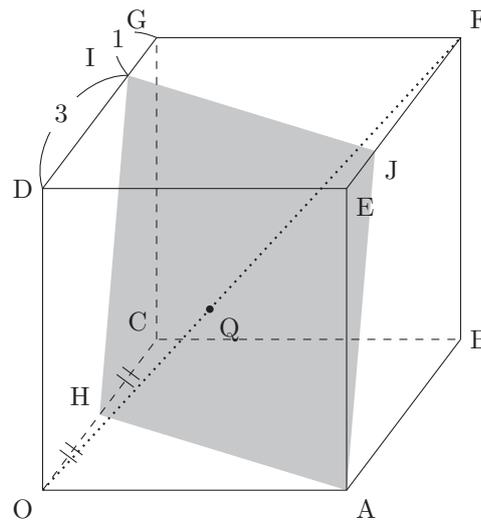
である。

一方 \vec{HI} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表すと、

$$\begin{aligned}\vec{HI} &= \vec{OI} - \vec{OH} \\ &= \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

であるため、 $u = \frac{1}{4}$ である。よって $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{8}$ である。

(3)



Q は直線 OF 上にあるため、ある実数 r を用いて

$$\vec{OQ} = r\vec{OF} = r\vec{a} + r\vec{c} + r\vec{d}$$

と表される。

一方 P は平面 AHI 上にあるため、ある実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= s\vec{OA} + t\vec{OI} + (1-s-t)\vec{OH} \\ &= s\vec{a} + t\left(\frac{3}{4}\vec{c} + \vec{d}\right) + \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{c} \\ &= s\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}t\right)\vec{c} + t\vec{d}\end{aligned}$$

と表される。

係数を比較すると

$$\begin{cases} v = s \\ v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}t \\ v = t \end{cases}$$

である。これを解くと $v = \frac{2}{5}$ を得る。 $v = \frac{OQ}{OF}$ であるため $\frac{OQ}{OF} = \frac{2}{5}$ となる。

以上より

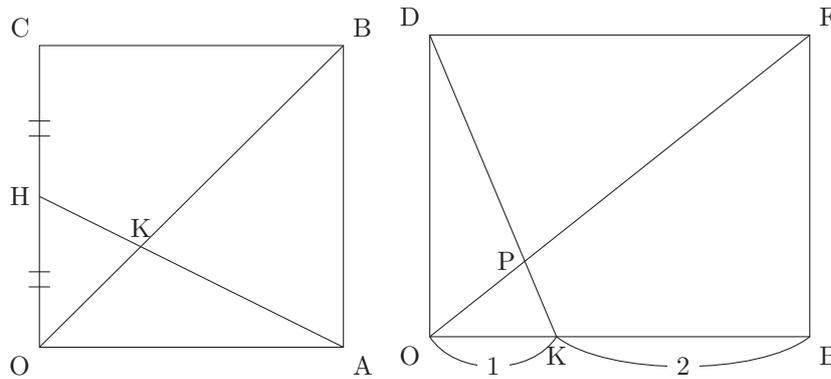
$$\begin{aligned} OP : PQ : QF &= \frac{1}{4} : \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) : \frac{3}{5} \\ &= 5 : 3 : 12 \end{aligned}$$

別解

(1) 直線 BO と平面 ADH の交点を K とおく。これは直線 OB と直線 AH の交点となる。

平面 OABC 上で考えることで $\frac{OK}{KB} = \frac{1}{2}$ を得る。

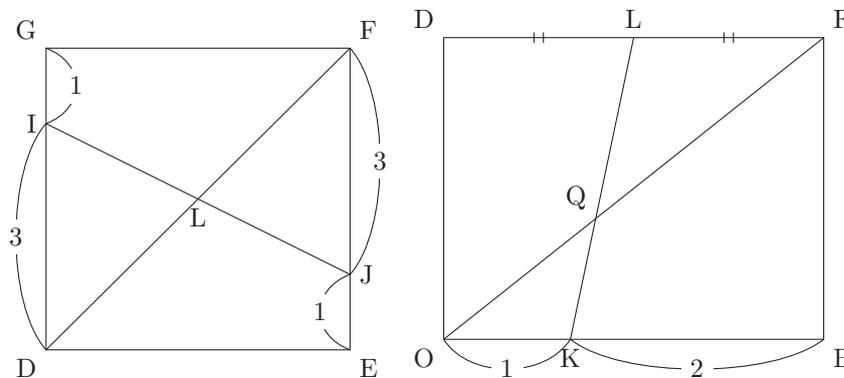
平面 OBF D 上で考えることで $\frac{OP}{OF} = \frac{OK}{DF + OK} = \frac{1}{4}$ を得る。



(3) 直線 BO と平面 AHI の交点は先ほどと同じく、直線 OB と直線 AH の交点となる。(これを K とおく。) 直線 DF と平面 AHI の交点を L とおく。これは直線 DF と直線 IJ の交点となる。

平面 DEFG 上で考えることで $\frac{IL}{LJ} = 1$ を得る。

平面 OBF D 上で考えることで $\frac{OQ}{OF} = \frac{OK}{LF + OK} = \frac{2}{5}$ を得る。後は同様に計算すればよい。



注釈

数値だけを答える問題であるため、OABC-DEFG を立方体と思って計算しても良いだろう。

V

n を自然数とする。 $a_n = \tan^n \frac{\theta}{2}$ ($-\pi < \theta < \pi$) で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $\theta = -\frac{\pi}{12}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{34}$ である。

(2) $\theta = \frac{\pi}{\boxed{35}}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は収束するが, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{36}$ である。

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\sqrt{\boxed{37} + \boxed{38}}}{\boxed{39}}$ であり, $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\sqrt{\boxed{40} - \boxed{41}}}{\boxed{42}}$ である。

解答

(1) $\theta = -\frac{\pi}{12}$ のとき, $a_n = \left\{ \tan \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right\}^n$ である。

$(-1 =) \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) < \tan \left(-\frac{\pi}{12} \right) < \tan \frac{\pi}{4} (= 1)$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(2) 無限等比数列 $a_n = \tan^n \frac{\theta}{2}$ が収束するのは

$$-1 < \tan \frac{\theta}{2} \leq 1$$

のときである。

$-1 < \tan \frac{\theta}{2} < 1$ のとき,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}}$ となるが, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し, 不適である。

$\tan \frac{\theta}{2} = 1$, すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき, $a_n = 1$ より,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ となり, 適する。

よって, 求める θ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり, このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき,

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= \tan \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$, $-1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ より, 求める無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

また、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \tan \frac{\pi}{12} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$a_n = (2 - \sqrt{3})^n$, $-1 < 2 - \sqrt{3} < 1$ より、求める無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

VI

$$f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-x)dt \text{ とする。}$$

(1) $f(x)$ の最大値は $\frac{\boxed{43}}{\boxed{44} \boxed{45}}$ であり、 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の最大値は $\frac{\boxed{46}}{\boxed{47}}$ である。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分を D とすると、 D の面積は $\frac{\boxed{48}}{\boxed{49} \boxed{50}}$ であり、 D を x 軸のま

わりに 1 回転させてできる立体の体積は $\frac{\boxed{51}}{\boxed{52} \boxed{53} \boxed{54}} \pi$ である。

解答

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x t(t-1)(t-x)dt \\ &= \int_0^x t^2(t-1)dt - x \int_0^x t(t-1)dt \dots\dots ① \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x - x \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) - x \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \\ &= -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

であるから、

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{6}x^2(2x-3)$$

x	...	0	...	$\frac{3}{2}$...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗		↘

したがって、 $f(x)$ の最大値は $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{64}$

さらに、

$$f''(x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

より、 $f''(x)$ が最大値は $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

別解

①を x で微分していくと、

$$\begin{cases} f'(x) = x^2(x-1) - \left\{ \int_0^x t(t-1)dt + x \cdot x(x-1) \right\} = -\int_0^x t(t-1)dt \dots\dots ② \\ f''(x) = -x(x-1) = -x^2 + x \dots\dots ③ \end{cases}$$

③を x で積分して

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

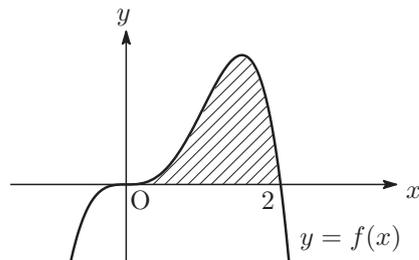
であり, ②より $f'(0) = 0$ だから $C = 0$ とわかり, $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ となる。

これをさらに x で積分して

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + D \quad (D \text{ は積分定数})$$

となり, ①より $f(0) = 0$ だから $D = 0$ とわかり, $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3$ となる。(以下略)

(2) 曲線 $y = f(x)$ の概形は次のようになる。



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= -\frac{1}{12} \int_0^2 x^3(x-2) dx \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{3! \cdot 1!}{5!} \cdot 2^5 \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= \frac{\pi}{144} \int_0^2 x^6(x-2)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{144} \cdot \frac{6! \cdot 2!}{9!} \cdot 2^9 \\ &= \frac{8}{567} \pi \end{aligned}$$

注釈

S, V の計算の最後では「第 1 種オイラー積分の公式」を用いた。

第 1 種オイラー積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (x - \beta)^n dx = \frac{(-1)^n m! n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

講評

I [小問集合] (易)

(1) 集合と論理, (2) 2次方程式, (3) 整数の性質, (4) 図形と方程式, (5) 対数関数からの出題であった。どれも教科書基本レベルの問題であり, 落とせない。

II [複素数平面] (易)

ド・モアブルの定理に関する出題であった。教科書基本レベルの問題であり, 落とせない。

III [確率] (易)

箱から球を取り出す確率に関する出題であった。教科書基本レベルの問題であり, 落とせない。

IV [空間図形] (やや易)

空間の交点の位置ベクトルに関する出題であった。教科書基本レベルの問題であるので, 失点はできれば避けたい。

V [極限] (やや易)

無限等比数列に関する出題であった。教科書基本レベルの問題であるので, 失点はできれば避けたい。

VI [積分法] (やや易)

定積分で表された関数に関する出題であった。 $f(x)$ は整関数で, 特に計算上も難しい箇所はない。失点はできれば避けたい。

昨年よりやや易しくなった。平易な問題ばかりであったので, いかにか素早く計算し計算ミスをしなないかの勝負となっただろう。一次突破ボーダーは 80% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校
YMS

03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

