解答速報

埼玉医科大学（後期） 数学

2022年 2月27日実施

$\boxed{1}$

次の問い (問 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　$-\pi < \theta < \pi$，$z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ とする。 z を $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ の形で表すと，

$$r = \boxed{\ 1\ }\cos\frac{\theta}{\boxed{\ 2\ }},\quad \alpha = \frac{\theta}{\boxed{\ 3\ }}$$

である。ただし，$r > 0$，$-\pi < \alpha < \pi$ とする。また，z^{32} が純虚数となるような θ の値は $\boxed{\ 4\ }\boxed{\ 5\ }$ 個ある。

問 2　三角形 ABC において，辺 AB を $1 : a$ に内分する点を E，辺 BC を $1 : b$ に内分する点を D とする。ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする。線分 AD と CE の交点を P とする。このとき，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} = \frac{\boxed{\ 6\ } + b}{ab}$$

である。また，$a + b = 5$ のときに $\triangle\mathrm{APE} : \triangle\mathrm{ABC} = 1 : 30$ となるのは，$a = \boxed{\ 7\ }$，$b = \boxed{\ 8\ }$ または $a = \boxed{\ 9\ }$，$b = \boxed{\ 10\ }$ のときである。

ただし，$\boxed{\ 7\ } < \boxed{\ 9\ }$ とする。

解答

問 1　$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$，$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ と変形できるので

$$\begin{aligned} z &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$2\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ より，$r = \boldsymbol{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$

さらに $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$，$-\pi < \alpha < \pi$ より，$\alpha = \boldsymbol{\dfrac{\theta}{2}}$

$z^{32} = \left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{32}(\cos 16\theta + i\sin 16\theta)$　($\because$ ド・モアブルの定理) であるから，z^{32} が純虚数となる条件は $\cos 16\theta = 0$ である。

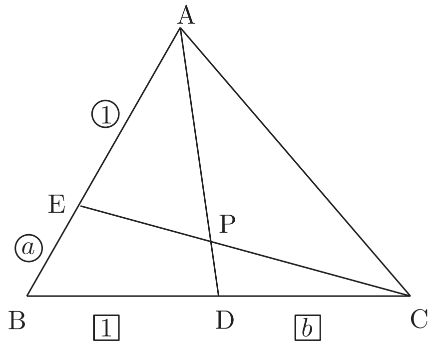
$$\cos 16\theta = 0 \iff 16\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$-\pi < \theta < \pi$ より，$-16\pi < 16\theta < 16\pi$ であるから

$$\begin{aligned} & -16\pi < \frac{\pi}{2} + n\pi < 16\pi \\ \iff & -32 < 1 + 2n < 32 \\ \iff & -\frac{33}{2} < n < \frac{31}{2} \end{aligned}$$

よって，この不等式を満たす整数 n は $n = -16,\ -15,\ \cdots,\ 14,\ 15$ であるから，θ の個数は **32** 個である。

問 2



メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}} \cdot \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \cdot \dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}} = 1$ が成り立つ。
よって，$\dfrac{b}{1+b} \cdot \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \cdot \dfrac{a}{1} = 1 \qquad \therefore \quad \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} = \boldsymbol{\dfrac{1+b}{ab}}$
$\triangle$ABC の面積を T，$\triangle$APE の面積を S とすると

$$T = S \cdot \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD}}{\mathrm{AE} \cdot \mathrm{AP}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{(1+a)(1+b+ab)}{1+b} \cdot (1+b)S$$

ここで，$T = 30S$ より

$$(1+a)(1+b+ab) = 30$$

が成り立つ。さらに $a + b = 5$ であることから

$$\begin{aligned} & (1+a)\left(-a^2+4a+6\right) = 30 \\ \iff & a^3 - 3a^2 - 10a + 24 = 0 \\ \iff & (a-2)(a-4)(a+3) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = 2,\ 4$ であるから，$\boldsymbol{a = 2,\ b = 3}$ または $\boldsymbol{a = 4,\ b = 1}$ である。

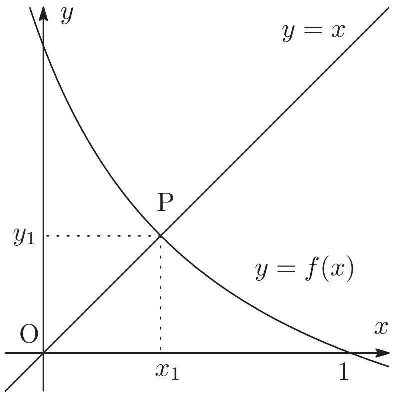
$\boxed{2}$

次の文章を読み，下の問い (**問** 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

a を正の定数とする。関数

$$f(x)=\frac{1}{x+a}-a$$

は $x>-a$ を定義域とし，$f(1)=0$ が成り立つものとする。



問 1　$y=f(x)$ のグラフを F とする。F は，$x>0$ における $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸の方向に $\boxed{\text{あ}}$，y 軸の方向に $\boxed{\text{い}}$ 平行移動して得られる。

(1)　$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$ に入る組み合わせとして最も適切なものを，次の①～⑧のうちから 1 つ選べ。$\boxed{11}$

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
あ	a	a	$-a$	$-a$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
い	a	$-a$	a	$-a$	a	$-a$	a	$-a$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}\left(\boxed{12}\,\boxed{13}+\sqrt{\boxed{14}}\right)$ である。

(3)　F と直線 $y=x$ の交点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると $f'(x_1)=\boxed{15}\,\boxed{16}$ である。

(4)　F と座標軸に囲まれる領域 (ただし境界を含む。) を A とする。A に含まれる円のうち，半径が最大のものを考える。この円の中心の x 座標は x_1 を用いて $\left(\boxed{17}-\sqrt{\boxed{18}}\right)x_1$ と表せる。

問 2　A のうち，$y\leqq x$ を満たす領域に面積は

$$\log\left(\frac{\boxed{19}+\sqrt{\boxed{20}}}{2}\right)+\frac{\boxed{21}-\sqrt{\boxed{22}}}{4}$$

解答

問 1 (1)　$y=f(x)\iff y-(-a)=\dfrac{1}{x-(-a)}$ より，F は，$x>0$ における $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸の方向に $\boldsymbol{-a}$，y 軸の方向に $\boldsymbol{-a}$ 平行移動して得られる。（④）

(2)　$f(1)=0$ より

$$\frac{1}{1+a}-a=0 \iff a^2+a-1=0$$

$a>0$ より，

$$a=\boldsymbol{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})}$$

(3)　$y=f(x)$ と $y=x$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \frac{1}{x+a}=x+a \\ &\iff (x+a)^2=1 \\ &\iff x+a=\pm 1 \\ &\iff x=-a\pm 1 \end{aligned}$$

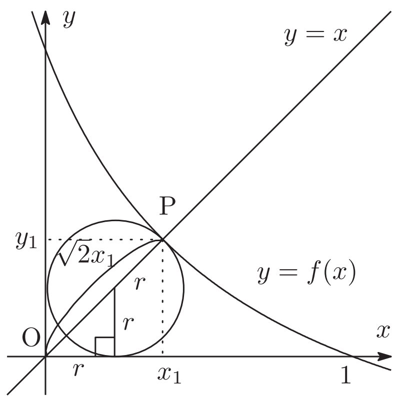
$x>-a$ のとき，$x=-a+1(=x_1)$ である。

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+a)^2}$$

であるので

$$f'(x_1)=-\frac{1}{(x_1+a)^2}=-\frac{1}{(-a+1+a)^2}=\boldsymbol{-1}$$

(4)　下図の円が，半径が最大のものである。（この円の半径を $r(>0)$ とする。）

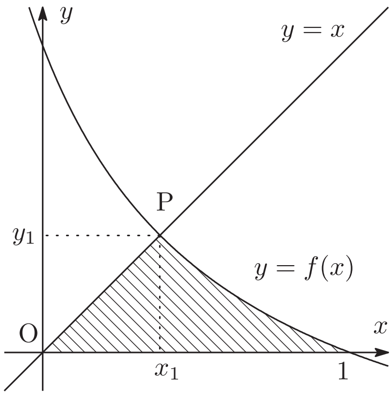


図の直角二等辺三角形に注目して

$$\begin{aligned} &r:\sqrt{2}x_1-r=1:\sqrt{2} \\ \iff &(\sqrt{2}+1)r=\sqrt{2}x_2 \\ \iff &r=(2-\sqrt{2})x_1 \end{aligned}$$

よって，求める円の中心の x 座標は，$\boldsymbol{(2-\sqrt{2})x_1}$ である。

問 2　求める面積は下図の斜線部分の面積である。



$y=f(x)$ が $y=x$ に関して対称であることより，求める面積は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+a}-a\right)dx\\
=&\frac{1}{2}\Big[\log(x+a)-ax\Big]_0^1 \quad (\because x>-a)\\
=&\frac{1}{2}\{\log(1+a)-a-\log a\}\\
=&\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{a}-\frac{1}{2}a\\
=&\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \left(\because a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right)\\
=&\frac{1}{2}\log\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\\
=&\boldsymbol{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{1-\sqrt{5}}{4}}
\end{aligned}
$$

(参考)　問 2 の面積を，対称性を利用せずに計算すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot x_1\cdot x_1+\int_{x_1}^1\left(\frac{1}{x+a}-a\right)dx\\
=&\frac{1}{2}{x_1}^2+\Big[\log(x+a)-ax\Big]_{x_1}^1 \quad (\because x>-a)\\
=&\frac{1}{2}{x_1}^2+\log(1+a)-a-\log(x_1+a)+ax_1\\
=&\frac{1}{2}(-a+1)^2+\log(1+a)-a+a(-a+1) \quad (\because x_1=-a+1)\\
=&\log(1+a)-\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2}\\
=&\log(1+a)-\frac{1}{2}(-a+1)-a+\frac{1}{2} \quad (\because a^2+a-1=0)\\
=&\log(1+a)-\frac{1}{2}a\\
=&\boldsymbol{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{1-\sqrt{5}}{4}} \quad \left(\because a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

n を 1 以上の整数とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 2n + 6\right)$$

で与えられるとする。

問 1　$a_1 = \boxed{\ 23\ }$，$a_2 = \boxed{\ 24\ }$ である。

問 2　$a_n = 462$ となるのは $n = \boxed{\ 25\ }\ \boxed{\ 26\ }$ のときである。

問 3　$Q_n = 1 + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ とするとき，

$$Q_n = \frac{\boxed{\ 27\ }\, n + \boxed{\ 28\ }}{\boxed{\ 29\ }\,(n+1)}$$

である。

解答

問 1　与式に $n = 1$ を代入して

$$S_1 = \frac{1}{3}\cdot 12 \iff a_1 = \mathbf{4}$$

続いて，与式に $n = 2$ を代入して

$$S_2 = \frac{1}{3}\cdot 30 \iff a_1 + a_2 = 10 \iff a_2 = \mathbf{6}$$

問 2　$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n + 6) - \frac{1}{3}\{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1) + 6\} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

$n = 1$ とすると，$1^2 + 1 = 2 \fallingdotseq a_1$ より

$$a_n = \begin{cases} n(n+1) & (n \geqq 2) \\ 4 & (n = 1) \end{cases}$$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = 462$ とすると

$$\begin{aligned} n^2 + n = 462 &\iff n^2 + n - 462 = 0 \\ &\iff (n-21)(n+22) = 0 \end{aligned}$$

よって，求める自然数 n は $n = \mathbf{21}$ である。

問 3　問 2 より，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
Q_n &= 1 + \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k} \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{5}{4} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{7n+3}{4(n+1)}
\end{aligned}
$$

$n=1$ とすると，$\dfrac{5}{4} = 1 + \dfrac{1}{a_1} = Q_1$ より，このときも成立する。

よって，$Q_n = \boldsymbol{\dfrac{7n+3}{4(n+1)}}$ である。

$\boxed{4}$

感染症の拡がりについて, 次のような仮定をもとに考察する。

ある集団を感染者と非感染者に分け，感染者の人数を I，非感染者の人数を S とする。非感染者の中には，過去に感染して回復した人がおり，その人は再び感染することはないとする。

接種により確率 q で感染しなくなるワクチンがある。非感染者のうち過去に感染した人の割合を p_0 とし, それ以外の非感染者でこのワクチン接種を受けた人の割合を v とする。また，過去に感染しておらず，ワクチン接種も受けていない人は，全て同様に感染しうると仮定する。このとき，$p = (1-p_0)\,qv + p_0$ は S 人の非感染者から無作為に選んだ 1 人が感染する可能性のない人である確率となる。$(1-p)S$ は感染の可能性がある人の人数として期待される値となる。

感染者数 I の 1 日あたりの増加数は次の式で与えられると仮定する。

$$D = a(1-p)SI - BI \qquad (1)$$

ここで a と b は正の定数である。式 (1) の右辺の第 1 項は，感染の可能性がある非感染者と感染者が接触することにより感染者が増えることを表し，第 2 項は感染者が回復するか亡くなることにより減小することを表す。感染者の人数 I が減少する条件は $D<0$ で与えられる。

問 1　$q = \dfrac{9}{10}$，$v = \dfrac{3}{5}$，$p_0 = \dfrac{1}{5}$ のとき，S 人の非感染者から無作為に 1 人選んだときに，その人が感染する可能性のない人だったとする。その人が過去に感染しておらず，かつワクチン接種を受けた人である確率は $\dfrac{\boxed{30}\,\boxed{31}}{\boxed{32}\,\boxed{33}}$ である。

問 2　接種により確率 $q = \dfrac{9}{10}$ で感染しなくなるワクチンがある。はじめ集団内に，感染して回復した人がおらず $(p_0 = 0)$，感染者も 1 人もいない状態で，一部の人にワクチン接種をする。接種が終わったあと，集団に 1 人の感染者が加わるとする。$I=1$，$\dfrac{aS}{b} = \dfrac{12}{5}$ のとき，感染を拡大させずに縮小させるためには，ワク チン接種を受ける人の割合を $v > \dfrac{\boxed{34}\,\boxed{35}}{\boxed{36}\,\boxed{37}}$ とすればよい。

解答

問 1 「S 人の非感染者から無作為に 1 人選んだときに，その人が感染する可能性のない人である」という事象を A,「S 人の非感染者から無作為に 1 人選んだときに，その人が過去に感染しておらず，かつワクチン接種を受けた人である」という事象を B とすると，求める確率 $P_A(B)$ は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{(1-p_0)qv}{(1-p_0)qv + p_0} \end{aligned}$$

$q = \dfrac{9}{10}$, $v = \dfrac{3}{5}$, $p_0 = \dfrac{1}{5}$ を代入して計算すると

$$P_A(B) = \mathbf{\frac{54}{79}}$$

問 2　$D = a(1-p)SI - bI < 0$ となる v の範囲を求める。$p_0 = 0$, $v = \dfrac{9}{10}$ のとき $p = \dfrac{9}{10}v$ であるから，$I=1$

と併せて

$$
\begin{aligned}
D<0 &\iff a\left(1-\frac{9}{10}v\right)S-b\cdot 1<0 \\
&\iff \frac{aS}{b}\left(1-\frac{9}{10}v\right)-1<0 \quad (\because\ b>0) \\
&\iff \frac{12}{5}\left(1-\frac{9}{10}v\right)-1<0 \quad \left(\because\ \frac{aS}{b}=\frac{12}{5}\right) \\
&\iff v>\boldsymbol{\frac{35}{54}}
\end{aligned}
$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合］(標準)

(1) 複素数平面，(2) 図形の性質からの出題であった。(1) の複素数は極形式に直せる有名な問題であり，(2) はメネラウスの定理を用いた線分比と面積比に関する問題で，医学部受験生ならば経験がある問題であるが，こういう問題は差がつきやすい。

$\boxed{2}$［数Ⅲ微分法，数Ⅲ積分法］（やや難）

分数関数からの出題であった。まともに計算すると計算量が増えるので，a を用いたまま計算を進めるなど，随所に工夫が必要である。計算ミスに注意したい。

$\boxed{3}$［数列］（やや易）

数列の和と一般項に関する出題であった。問 3 では，$a_n = n^2 + n\ (n \geqq 2)$ が $n = 1$ のとき成立しないので，その点には注意したい。

$\boxed{4}$［確率］（やや難）

問題文により定義される確率の問題であった。総合問題によく見られるような問題で，必要な情報をしっかりと抽出できたか，読解力を問われた形である。

絶妙な難易度の出題で差がつくような大問構成であったように思われる。昨年度に比べて大問数は増え，内容もやや難化した。一次突破ラインは 55% 程度か。