埼玉医科大学（前期）　数学

2021年 2月6日実施

$\boxed{1}$

次の問い (問 1, 2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　$y=\sqrt{x+a}$ と $y=|-x+a|$ の共有点の個数を n とする。$k=\dfrac{\boxed{1}\,\boxed{2}}{\boxed{3}}$ とすると，$a=k$ のとき $n=\boxed{4}$，$a>k$ のとき $n=\boxed{5}$，$a<k$ のとき $n=\boxed{6}$ である。

問 2　α を $0<\alpha<\pi$ の定数とする。$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{2b}{3a}+\dfrac{9a}{8b}+\tan\alpha$ が最小値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとるとすると，$\alpha=\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{8}}\pi$ である。また，そのときの a，b，α に対して $\tan\beta=\dfrac{b}{a}$ とすると，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{11}\,\boxed{12}}$$

である。

解答

問 1

fig.1　$a>0$ のとき

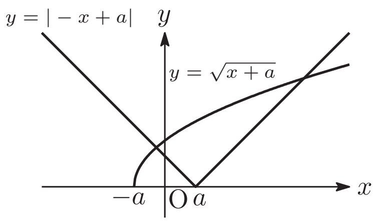


fig.2　$a=0$ のとき

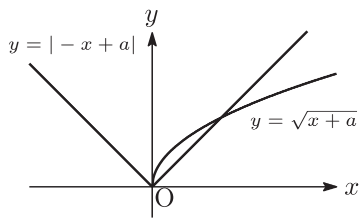
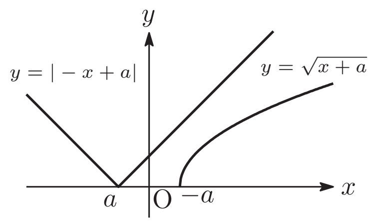


fig.3　$a<0$ のとき



$y=f(x)=\sqrt{x+a}$，$y=g(x)=|-x+a|$ とする。
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点が 1 つとなるのは，
$a<0$ で，$y=f(x)$ の $x\geqq 0$ の部分と $y=g(x)$ が接しているときである。
すなわち，$y=x-a$ $(x\geqq a)$ と $y=\sqrt{x+a}$ $(x\geqq -a)$ が接しているときであるから，連立して

$$x-a=\sqrt{x+a}$$
$$(x-a)^2=x+a$$
$$x^2-(2a+1)x+a^2-a=0 \quad \cdots\cdots①$$

①の判別式 $D=0$ より

$$D=(2a+1)^2-4(a^2-a)=0$$

$$a = -\frac{1}{8}$$

このとき，①より $x = \dfrac{2a+1}{2} = \dfrac{3}{8}$ であり，これは $x \geqq a$，$x \geqq -a$ を満たす。

よって，上の fig.1〜fig.3 を参考にして，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の個数 n は，$\boldsymbol{k = -\dfrac{1}{8}}$ として

$$\begin{cases} a = k \text{ のとき} \quad \boldsymbol{n = 1} \\ a > k \text{ のとき} \quad \boldsymbol{n = 2} \\ a < k \text{ のとき} \quad \boldsymbol{n = 0} \end{cases}$$

となる。

問 2　$F = \dfrac{2b}{3a} + \dfrac{9a}{8b} + \tan\alpha$ とする。

$a > 0$，$b > 0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$F \geqq 2\sqrt{\frac{2b}{3a} \cdot \frac{9a}{8b}} + \tan\alpha$$
$$\therefore \ F \geqq \sqrt{3} + \tan\alpha$$

が成り立ち，この不等式の等号は

$$\frac{2b}{3a} = \frac{9a}{8b} \text{ かつ } a > 0,\ b > 0$$
$$\therefore \ \frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

のときに成立する。

したがって，F の最小値は $\sqrt{3} + \tan\alpha$ であり，これが $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\sqrt{3} + \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\therefore \ \alpha = \boldsymbol{\frac{5}{6}\pi} \quad (\because 0 < \alpha < \pi)$$

$\tan\beta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}} \\ &= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{21}} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$a > 0$ として関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{x+a} (t^4 - 4)\ dt$$

とする。

問 1　$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = a\left(\boxed{13}\,x + \boxed{14}\,a\right)\left(\boxed{15}\,x^2 + \boxed{16}\,ax + \boxed{17}\,a^2\right)$$

である。

問 2　$f'(x) = 0$ を満たす実数 x は

$$x = \frac{\boxed{18}\ \boxed{19}}{\boxed{20}}a$$

である。

問 3　$a = 2$ のとき，$f(x)$ の最小値は

$$\frac{\boxed{21}\ \boxed{22}\ \boxed{23}}{\boxed{24}}$$

である。

解答

問 1　$f(x) = \displaystyle\int_x^{x+a} (t^4 - 4)\ dt$ より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left\{(x+a)^4 - 4\right\} \cdot (x+a)' - (x^4 - 4) \cdot (x)' \\
&= (x+a)^4 - x^4 \\
&= \left\{(x+a)^2 - x^2\right\}\left\{(x+a)^2 + x^2\right\} \\
&= (2ax + a^2)(2x^2 + 2ax + a^2) \\
&= \boldsymbol{a(2x+a)(2x^2+2ax+a^2)}
\end{aligned}$$

問 2　$f'(x) = 0$ となるのは，問 1 より

$$a(2x+a)(2x^2+2ax+a^2) = 0$$
$$a(2x+a)\left\{2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\right\} = 0$$

であり，$a > 0$，$2\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{2} > 0$ であるから

$$x = \boldsymbol{\frac{-1}{2}a}$$

問 3　問 2 より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=-\dfrac{a}{2}$ で極小かつ最小となる。

$a=2$ のときは $x=-1$ で最小となり，最小値は

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_{-1}^{1}(t^4-4)\ dt \\ &= 2\int_{0}^{1}(t^4-4)\ dt \\ &= 2\left[\frac{t^5}{5}-4t\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{-38}{5}} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

次の文章を読み，下の問いに (**問** 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

半径 1 の円に内接する四角形 ABCD において，対角線 AC と BD の交点を E とする。また，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{4}{3}$，$\angle\mathrm{BAD}=60^\circ$ とする。

問 1　$\mathrm{BD}=\sqrt{\boxed{25}}$ であり，$\mathrm{AB}=\dfrac{\boxed{26}\sqrt{\boxed{27}\,\boxed{28}}}{\boxed{29}}$ である。

問 2　$\mathrm{AE}=\dfrac{\boxed{30}\sqrt{\boxed{31}}}{\boxed{32}}$ である。

問 3　三角形 ABD の面積は

$$\frac{\boxed{33}\sqrt{\boxed{34}}}{\boxed{35}\,\boxed{36}}$$

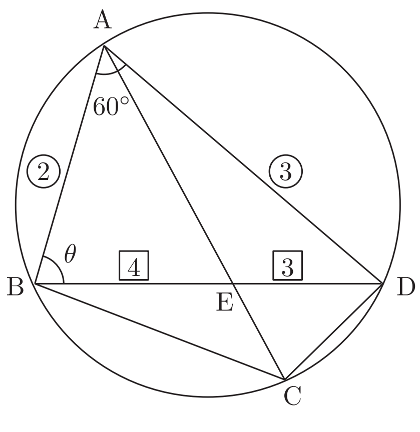
である。

問 4　三角形 BCD の面積は

$$\frac{\boxed{37}\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}\,\boxed{40}}$$

である。

解答



問 1　△ABD において正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin 60^\circ}=2\cdot 1 \iff \mathrm{BD}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

ここで，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}$ より，AB$=2x$，AD$=3x$（$x>0$）とおける。このとき，△ABD において余弦定理より

$$(\sqrt{3})^2=(2x)^2+(3x)^2-2\cdot 2x\cdot 3x\cdot\cos 60^\circ \iff x=\frac{\sqrt{21}}{7}\quad (\because x>0)$$

よって，AB$=2x=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{21}}}{\mathbf{7}}$，AD$=3x=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

問 2　$\angle\mathrm{ABD}=\theta$ とおく。このとき，△ABD において余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{21}}{7}\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

したがって，△ABE において余弦定理より

$$\mathrm{AE}^2=\left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2-2\cdot\frac{2\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\cos\theta \iff \mathrm{AE}=\frac{\mathbf{6\sqrt{3}}}{\mathbf{7}}\quad(\because \mathrm{AE}>0)$$

問 3　△ABD の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin 60^\circ=\frac{\mathbf{9\sqrt{3}}}{\mathbf{14}}$$

問 4　方べきの定理より

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{ED}=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EC}\iff \mathrm{EC}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

したがって，AE : EC$=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}:\dfrac{2\sqrt{3}}{7}=3:1$ となるので，△ABD : △BCD $=3:1$ より，△BCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABD}\times\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{14}}$$

$\boxed{4}$

　次の文章を読み，下の問い（**問** 1〜4）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

ある感染症について，以下のような仮定のもとに感染者数を考察した。

仮定 0 : 感染した人は回復することなく，ずっと感染したままである。
仮定 1 : はじめに 1 人が感染した。この日を第 1 日目とする。
仮定 2 : 第 2 日目は 1 人も感染しなかった。
仮定 3 : n を自然数として，第 $(n+2)$ 日目に新たに感染する人は，第 n 日目までの全感染者数の 2 倍である。

問 1　第 n 日目の全感染者数を S_n とする。このとき，漸化式

$$S_{n+2} = \boxed{41}\,S_{n+1} + \boxed{42}\,S_n$$

を満たす。

問 2　関係式

$$S_{n+2} - \alpha S_{n+1} = \beta(S_{n+1} - \alpha S_n)$$

を満たすような α，β を求めると，

$$\alpha = \boxed{43}\,\boxed{44},\ \beta = \boxed{45}$$

である。ただし，$\alpha < \beta$ とする。

問 3　m を自然数とする。

$$a_m = S_{m+1} - \alpha S_m,\ b_m = S_{m+1} - \beta S_m$$

とおくと，

$$a_n = \boxed{46},\ b_n = (\boxed{47}\,\boxed{48})^n$$

である。

問 4　全感染者数が初めて 1 万人を超えるのは第 $\boxed{49}\,\boxed{50}$ 日目である。

解答

問 1　仮定 0 および仮定 3 より，第 $(n+2)$ 日目の全感染者数は，第 $(n+1)$ 日までの全感染者数に，第 n 日目までの全感染者数の 2 倍の数を足した数となるから，

$$\boldsymbol{S_{n+2} = S_{n+1} + 2S_n}$$

問 2　特性方程式 $x^2 = x + 2 \iff x = -1,\ 2$ であるから，問 1 の式は次のように変形できる。

$$\begin{cases} S_{n+2} - (-1)S_{n+1} = 2\{S_{n+1} - (-1)S_n\} & \cdots\cdots① \\ S_{n+2} - 2S_{n+1} = -(S_{n+1} - 2S_n) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

よって，$\alpha < \beta$ に注意して，$\boldsymbol{\alpha = -1,\ \beta = 2}$

問 3　①②より

$$\begin{cases} S_{n+1}+S_n &= (S_2+S_1)\cdot 2^{n-1} \\ S_{n+1}-2S_n &= (S_2-2S_1)(-1)^{n-1} \end{cases}$$

ここで，仮定 1 および仮定 2 より，$S_1=1$, $S_2=1$ であるので

$$\begin{cases} S_{n+1}+S_n &= 2^n & \cdots\cdots③ \\ S_{n+1}-2S_n &= (-1)^n & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

よって，$a_n=S_{n+1}+S_n$，$b_n=S_{n+1}-2S_n$ より，$\boldsymbol{a_n=2^n}$，$\boldsymbol{b_n=(-1)^n}$

問 4　$(③-④)\div 3$ より

$$S_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

$S_n>10^4$ のとき

$$2^n-(-1)^n>3\cdot 10^4$$

$n=14$ のとき $2^{14}-(-1)^{14}=16383$，$n=15$ のとき $2^{15}-(-1)^{15}=32769$ であり，$2^n-(-1)^n$ が単調増加であることと併せて，S_n が初めて 10^4 を超えるのは $\boldsymbol{n=15}$ のときである。

講評

1 ［小問集合］((1) 易 (2) 易)

(1)(2) ともに基本的な出題であった。(1) は問題文に惑わされないようにしたい。図の位置を正確に把握し，共有点の個数を調べていく。(2) は相加平均・相乗平均の関係を用いるだけである。計算ミスに注意しよう。

2 ［積分法］（易）

微積分の基本原理に関する出題であった。YMS 生は 1 月模試の第 3 問で出題しているので，記憶にも新しかったのではないか。要領よく計算していきたい。

3 ［図形の計量］（やや易）

計算がやや複雑であるが，内容は基本的なものであった。内接四角形の図形問題に慣れ親しんでいる受験生には難なく解けたのではないか。問 4 では面積比の性質をうまく利用できれば計算量も大幅に減らせる。

4 ［数列］（やや易）

仮定の意味を理解すれば，あとは 3 項間漸化式を解くだけの問題である。慌てず確実に処理していきたい。

昨年度以前に比べて難易度に変化はないが，計算量は大幅に減った。計算量については昨年度に比べて試験時間が 10 分少なくなったことが反映されたのだろう。時間が減った分，計算のつまずきが結果に大きく影響したのではないか。時間も考えて目標は 80%。