解答速報

東京女子医科大学　数学

2021年 1月28日実施

※聞き取りによる問題再現をしているため，内容の一部に誤りがある場合があります。予めご了承ください。

1

次の各問いに答えよ。

① $\dfrac{1}{\sqrt{12}-3}$ の整数部分 a，小数部分 b を求めよ。

② 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$ を求めよ。

③ $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ を求めよ。

解答

① $\dfrac{1}{\sqrt{12}-3}=\dfrac{\sqrt{12}+3}{3}=1+\dfrac{\sqrt{12}}{3}$

$3<\sqrt{12}<4 \iff 1<\dfrac{\sqrt{12}}{3}<\dfrac{4}{3}$ より，$\dfrac{\sqrt{12}}{3}$ の整数部分は 1 であるので，

$$a=1+1=\mathbf{2},\ b=\left(1+\frac{\sqrt{12}}{3}\right)-a=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}$$

② $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+4}=\mathbf{\frac{1}{8}}$

③ $\tan\theta=\tan\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

また，$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ より $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{5}$ なので，$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=2\cdot\dfrac{4}{5}-1=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

したがって，$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{5}=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$

2

原点 O を中心とする半径 1 の円 C 上に異なる 2 点 A，B がある。また，点 P は円 C の周上または外部の点であるとする。AB : BP : PA=2 : $\sqrt{3}$: 1 のとき，次の各問いに答えよ。

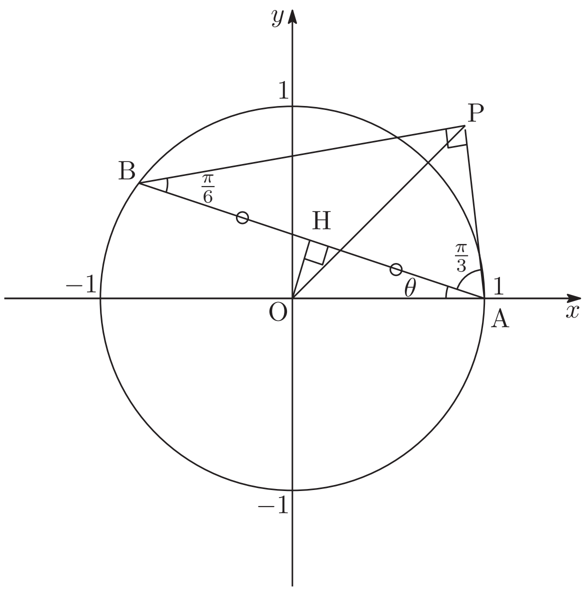
① AB$=2x$（$0<x\leqq 1$）とするとき，OP^2 を x を用いて表せ。

② 2 点 A，B が円 C の円周上を動くとき，OP の最大値を求めよ。

解答

① 点 A(1, 0)，(点 B の y 座標)$\geqq 0$ であるとしても一般性を失わない。

原点 O から AB に下ろした垂線の足を H とする。$\angle\mathrm{OAB}=\theta\ \left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$2x=2\mathrm{AH}$，AH$=\cos\theta$ より，$x=\cos\theta$ であるから，△OAP において余弦定理を用いると



$$
\begin{aligned}
\mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OA}^2+\mathrm{AP}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AP}\cos\angle\mathrm{OAP}\\
&=1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\\
&=1+x^2-2x\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)\quad(\because\ \text{加法定理})\\
&=1+x^2-2x\left(x\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&\qquad\left(\because\ x=\cos\theta,\ 0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{より}\ \sin\theta=\sqrt{1-x^2}\right)\\
&=\boldsymbol{1+x\sqrt{3(1-x^2)}}
\end{aligned}
$$

② ① より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OP}^2 &= 1+\sqrt{3}\sqrt{x^2-x^4}\\
&=1+\sqrt{3}\sqrt{t-t^2}\quad(x^2=t\ \text{とした，}0<x\leqq 1\ \text{より}\ 0<t\leqq 1)\\
&=1+\sqrt{3}\sqrt{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

したがって，OP^2 は $t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大で，その値は $1+\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める OP の最大値は $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$

3

サイコロ 3 つを同時に振るとき，次の各問いに答えよ。

① いずれか 2 つの目の合計が 4 になる確率を求めよ。

② いずれか 2 つの目の合計が 8 になる確率を求めよ。

③ どの 2 つの目の合計も 4，8 にならない確率を求めよ。

解答

サイコロ 3 つを同時に振るとき，目の出方は全部で 6^3 通りあり，これらはすべて同様に確からしい。

① 6^3 通りの出る目のうち，いずれか 2 つの目の和が 4 になるものは，以下の通りである。

出る目の組み合わせ	目の出方
{1, 3, 1}	3 通り
{1, 3, 2}	6 通り
{1, 3, 3}	3 通り
{1, 3, 4}	6 通り
{1, 3, 5}	6 通り
{1, 3, 6}	6 通り

出る目の組み合わせ	目の出方
{2, 2, 1}	3 通り
{2, 2, 2}	1 通り
{2, 2, 3}	3 通り
{2, 2, 4}	3 通り
{2, 2, 5}	3 通り
{2, 2, 6}	3 通り

よって，求める確率は

$$\frac{6\times4+3\times7+1}{6^3}=\mathbf{\frac{23}{108}}$$

② 6^3 通りの出る目のうち，いずれか 2 つの目の和が 8 になるものは，以下の通りである。

出る目の組み合わせ	目の出方
{2, 6, 1}	6 通り
{2, 6, 2}	3 通り
{2, 6, 3}	6 通り
{2, 6, 4}	6 通り
{2, 6, 5}	6 通り
{2, 6, 6}	3 通り

出る目の組み合わせ	目の出方
{3, 5, 1}	6 通り
{3, 5, 2}	6 通り
{3, 5, 3}	3 通り
{3, 5, 4}	6 通り
{3, 5, 5}	3 通り
{3, 5, 6}	6 通り

出る目の組み合わせ	目の出方
{4, 4, 1}	3 通り
{4, 4, 2}	3 通り
{4, 4, 3}	3 通り
{4, 4, 4}	1 通り
{4, 4, 5}	3 通り
{4, 4, 6}	3 通り

よって，求める確率は

$$\frac{6\times8+3\times9+1}{6^3}=\mathbf{\frac{19}{54}}$$

③ サイコロ 3 つを同時に振るとき

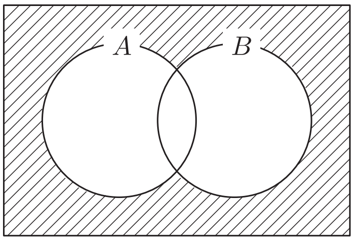
$$\begin{cases}\text{いずれか 2 つの目の和が 4 になる事象を } A\\ \text{いずれか 2 つの目の和が 8 になる事象を } B\end{cases}$$

とすると，① , ② より事象 A，B が起こる場合の数はそれぞれ 46 通り，76 通りである。

さらに，事象 $A\cap B$ が起こる場合の数は，$\{1,\ 3,\ 5\}$ で 6 通り，$\{2,\ 2,\ 6\}$ で 3 通りの計 9 通りある。

求める確率は事象 $\overline{A\cup B}$ の確率であるから

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\
&= 1 - \frac{76 + 46 - 9}{6^3} \\
&= \mathbf{\frac{103}{216}}
\end{aligned}
$$



4

実数 x，y が $x>0$，$y>0$，$xy^{1+\log_2 x^2}=1$ を満たしているとき，xy のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

$xy^{1+\log_2 x^2}=1$ の両辺が正であることより，底を 2 とする対数をとると

$$\begin{aligned}&\log_2(xy^{1+2\log_2 x})=\log_2 1\\ \iff\ &\log_2 x+(1+2\log_2 x)\log_2 y=0\end{aligned}$$

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$（$x>0$，$y>0$ より X，Y は任意の実数）とおくと，条件は，

$$X+(1+2X)Y=0\ \cdots\cdots ①$$

となり，このもとで $\log_2 xy=X+Y$ のとりうる値の範囲を考える。
$X+Y=k$ となるのは，$Y=k-X$ を① に代入した X の方程式

$$\begin{aligned}&X+(1+2X)(k-X)=0\\ \iff\ &2X^2-2kX-k=0\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

が実数解をもつときであるから，② の判別式を D として

$$\begin{aligned}&\frac{D}{4}=k^2+2k\geqq 0\\ \therefore\ \ &k\leqq -2 \text{ または } 0\leqq k\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\log_2 xy\leqq -2 \text{ または } 0\leqq \log_2 xy\\ \therefore\ \ &\boldsymbol{0<xy\leqq \frac{1}{4}} \text{ または } \boldsymbol{1\leqq xy}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$xy^{1+\log_2 x^2}=1$ の両辺が正であることより，底を 2 とする対数をとると

$$\begin{aligned}&\log_2(xy^{1+2\log_2 x})=\log_2 1\\ \iff\ &\log_2 x+(1+2\log_2 x)\log_2 y=0\end{aligned}$$

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$（$x>0$，$y>0$ より X，Y は任意の実数）とおくと，条件は，

$$X+(1+2X)Y=0\ \cdots\cdots ①$$

となり，このもとで $\log_2 xy=X+Y$ のとりうる値の範囲を考える。
① において，$X=-\dfrac{1}{2}$ とすると，① は成立しないので，$X\neq -\dfrac{1}{2}$ より

$$Y=-\frac{X}{1+2X}$$

したがって，$X+Y=X-\dfrac{X}{1+2X}=\dfrac{2X^2}{1+2X}$，また，$X$ は $-\dfrac{1}{2}$ 以外のすべての実数をとりうる。

$f(X)=\dfrac{2X^2}{1+2X}$ とおくと，$f'(X)=\dfrac{4X(X+1)}{(1+2X)^2}$ より，増減は次のようになる。

X	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$		$-$		$+$
$f(X)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(X)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(X)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0} f(X)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0} f(X)=-\infty$

したがって，$f(X)\leqq -2$ または $0\leqq f(X)$ であるので，

$$\log_2 xy \leqq -2 \text{ または } 0 \leqq \log_2 xy$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{0 < xy \leqq \frac{1}{4}} \textbf{ または } \boldsymbol{1 \leqq xy}$$

講評

1［小問集合］(① 易　② 易　③ 易)
どれも平易で計算量も少ないので，ここでは落とせない。

2［図形と方程式，三角関数］（やや難）
幾何での処理を試みると計算量も少なく済むが，試験中に落ち着いて処理するのは難しかったのではないだろうか。完答できる受験生も少ないと予想され，あまり差がつかないと思われる。

3［確率］（やや易）
③の計算で事象 A，B の重複に注意する以外は丁寧に数え上げるだけであるので，ここは完答を目指したい。

4［指数関数・対数関数］（標準）
対数をとって考えていく典型問題である。$\log_2 x = X$ などとおき，そのあとは実数条件を利用する，または分数関数の値域や線形計画法を考えてもよいだろう。なお，指数の底は xy ではなく y となっている点に注意したい。

昨年度に比べて全体的に易化し，計算量も少なくなった。**1** の小問集合はどれも教科書レベル，**3** ③の確率はベン図を用いる典型問題である。一方で **2** は取っ掛かりが難しかった。ボーダーは 60% 程度であろう。