日本大学医学部（A方式） 数学

2019年 2月8日実施

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えなさい．

(1) つぎの式の値を求めなさい．

$$\left\{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6})+\frac{5+3\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right\}^2=\boxed{1}+\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$$

(2) $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)=36$ を解くと，$x=-\boxed{4}$，$-\boxed{5}\pm\sqrt{\boxed{6}\boxed{7}}$

(3) 白玉 8 個と赤玉 4 個が入っている袋から，玉を 3 個同時に取り出すとき，取り出した玉が，白玉が 2 個かつ赤玉が 1 個である確率は $\dfrac{\boxed{8}\boxed{9}}{\boxed{10}\boxed{11}}$ である．

(4) x に関する不等式 $\log_{\frac{1}{10}}(x+4)\leqq\log_{10}(10-x)$ を解くと

$$\boxed{12}-\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}\leqq x\leqq\boxed{15}+\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}$$

である．

解答

(1)

$$\begin{aligned}\left\{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6})+\frac{5+3\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right\}^2&=\left\{2(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})+\frac{(5+3\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}\right\}^2\\&=\left\{2(25-24)+\frac{\sqrt{3}-1}{49-48}\right\}^2\\&=(1+\sqrt{3})^2\\&=\mathbf{4+2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(2) $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)=36$ を変形すると $(x^2+2x-8)(x^2+2x-3)=36$ となる．
ここで，$x^2+2x-8=A$ とおくと，

$$\begin{aligned}&A(A+5)=36\\\iff&A^2+5A-36=0\\\iff&(A+9)(A-4)=0\\\iff&A=-9,\ 4\end{aligned}$$

よって，$x^2+2x+1=0$ または $x^2+2x-12=0$ の解を求めれば良い．これを解くと $x=\mathbf{-1,\ -1\pm\sqrt{13}}$.

(3) 白玉 8 個，赤玉 4 個の合計 12 個の玉の中から 3 個の玉を取り出すので，すべての玉を区別して考えるとき，その取り出し方は全部で ${}_{12}\mathrm{C}_3$ 通り．

また，白玉を 2 個，赤玉を 1 個取り出すのは，すべての玉を区別して考えると ${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1$ 通り.

よって求める確率は $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\dfrac{28}{55}}$ である.

(4) $\log_{\frac{1}{10}}(x+4) \leqq \log_{10}(10-x) \quad \cdots ①$

真数条件より，$x+4>0$ かつ $10-x>0$ なので，$-4<x<10 \quad \cdots ②$.

このとき，① を変形し，

$$
\begin{aligned}
① &\iff \log_{\frac{1}{10}}(x+4) \leqq \log_{10}(10-x) \\
&\iff -\log_{10}(x+4) \geqq \log_{10}(10-x) \\
&\iff \log_{10}(10-x)(x+4) \geqq 0 \\
&\iff (10-x)(x+4) \geqq 1 \\
&\iff x^2-6x-39 \leqq 0 \\
&\iff \boldsymbol{3-4\sqrt{3} \leqq x \leqq 3+4\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

これは ② を満たす.

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えなさい．

(1) 直線 $y = 2x + k$ と曲線 $4x^2 + y^2 = 16$ がちょうど 2 個の共有点をもつための k の値の範囲は $-\boxed{18}\sqrt{\boxed{19}} < k < \boxed{20}\sqrt{\boxed{21}}$ である．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{1}{24}(2n^3 - 75n^2 + 97n)$ $(n \geqq 1)$ で与えられるとする．a_n は $n = \boxed{22}\,\boxed{23}$ のとき最小値 $-\boxed{24}\,\boxed{25}$ をとる．

(3) a, b を定数とする．

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+a} - b}{x-2} = 2$$

であるならば，$a = -\dfrac{\boxed{26}\,\boxed{27}}{\boxed{28}\,\boxed{29}}$，$b = \dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ である．

(4) 2 つの曲線 $y = -x^2 + 3$ および $y = x^2 - 5x$ により囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{32}\,\boxed{33}\,\boxed{34}}{\boxed{35}\,\boxed{36}}$ である．また，これら 2 つの曲線の交点をともに通る直線の方程式は $\boxed{37}\,x + \boxed{38}\,y = 3$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 直線 $y = 2x + k$ と楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ が 2 つの共有点をもつとき，この 2 つの図形を y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍して考えると，

$$\text{直線 } l' : 2x - 2y + k = 0,\ \text{円 } C' : x^2 + y^2 = 4$$

が共有点を 2 つ持つことと同値である．したがって円 C' の中心 O と直線 l' との距離を d とおくとき，$d < 2(=$ 半径$)$ が成り立てばよいので，

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} < 2$$

$$\iff |k| < 4\sqrt{2}$$

$$\iff \boldsymbol{-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}}.$$

(2) $S_n = \dfrac{1}{24}(2n^3 - 75n^2 + 97n)$ $(n \geqq 1)$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 1$ である．

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{24}\left[(2n^3 - 75n^2 + 97n) - \{2(n-1)^3 - 75(n-1)^2 + 97(n-1)\}\right] \\ &= \frac{1}{24}(6n^2 - 156n + 174) \\ &= \frac{1}{4}(n^2 - 26n + 29) \end{aligned}$$

この式は $n = 1$ のとき $a_1 = 1$ を満たす．ここで

$$a_n = \frac{1}{4}(n - 13)^2 - 35$$

と変形できるので，$\boldsymbol{n = 13}$ のときに最小値 $\boldsymbol{-35}$ をとる．

(3)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=2$$

このとき，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}\cdot(x-2)=2\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)=0\\ \Longleftrightarrow&\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-b)=0\\ \Longleftrightarrow&\sqrt{2+a}=b\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+a-(2+a)}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2+a}}\\&=2\end{aligned}$$

これを解くと $\boldsymbol{a=-\frac{31}{16}}$．このとき，$\boldsymbol{b=\frac{1}{4}}$ である．

(4)　$y=-x^2+3$ と $y=x^2-5x$ の交点の x 座標を求めると，

$$-x^2+3=x^2-5x\Longleftrightarrow 2x^2-5x-3=0\Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2},\ 3$$

したがって，2 つの曲線により囲まれる図形の面積は，

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\{(-x^2+3)-(x^2-5x)\}dx&=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)dx\\&=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(3+\frac{1}{2}\right)^3\\&=\boldsymbol{\frac{343}{24}}\end{aligned}$$

また，k を実数として，

$$(y+x^2-3)+k(y-x^2+5x)=0$$

と表される曲線は，与えられた 2 曲線の 2 交点を通る．ここで，$k=1$ を代入すると $x-2$ の項が消えて x，y の 1 次方程式となるが，これが求める直線に他ならない．

$$(y+x^2-3)+(y-x^2+5x)=0\Longleftrightarrow \boldsymbol{5x+2y=3}$$

$\boxed{3}$

AB $= 3$, BC $= 6$, CA $= 5$ である三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に垂線 AD を引く．三角形 ABD の内接円の中心を $\mathrm{O_1}$ とし半径を r_1 で表す．また，三角形 ADC の内接円の中心を $\mathrm{O_2}$ とし半径を r_2 で表す．

(1)　$\mathrm{AD} = \dfrac{\boxed{39}}{3}\sqrt{\boxed{40}\,\boxed{41}}$，$r_1 = \dfrac{\sqrt{\boxed{42}\,\boxed{43}} - \boxed{44}}{\boxed{45}}$，$r_2 = r_1 + \dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}$ である．

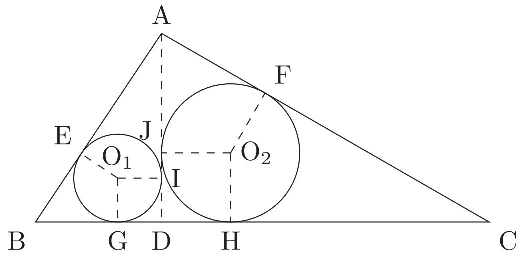
(2)　内接円 $\mathrm{O_1}$ と辺 AB との接点を E，内接円 $\mathrm{O_2}$ と辺 CA との接点を F とするとき，

$\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{\boxed{48}\,\boxed{49}} + \boxed{50}}{\boxed{51}}$，$\mathrm{AF} = \mathrm{AE} - \dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}}$ である．

(3)　$\mathrm{AO_1}$ と $\mathrm{AO_2}$ のなす角を θ で表すとき，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{54}\,\boxed{55}\,\boxed{56}}}{15}$ である．また，三角形 $\mathrm{AO_1O_2}$ の面積は $\dfrac{\boxed{57}}{\boxed{58}}$ である．

解答

下の図のように接点を G，H，I，J とする．



(1)　△ABC で余弦定理を用いると．

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot3\cdot6} = \frac{5}{9}$$

したがって，$\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{2\sqrt{14}}{9}$ であり，△ABD において，

$$\mathrm{BD} = \mathrm{AB}\times\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{5}{3}$$

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\times\sin\angle\mathrm{ABC} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{14}}{3}}$$

また，AE $=$ AI $= a$，BE $=$ BG $= b$ とおくと，

$$\mathrm{AB} = a+b,\ \mathrm{BD} = b+r_1,\ \mathrm{AD} = a+r_1$$

であり，これを利用して

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD} = 2a+2b+2r_1 = 3+\frac{5}{3}+\frac{2\sqrt{14}}{3},\ a+b=3$$

よって，$r_1 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}-2}{3}}$.

同様に AF $=$ AJ $= c$，CH $=$ CF $= d$ とおくと，

$$\mathrm{AD}+\mathrm{CD}+\mathrm{AC} = 2c+2d+2r_2 = \frac{2\sqrt{14}}{3}+\frac{13}{3}+5,\ c+d=5$$

よって，$r_2 = \dfrac{\sqrt{14}-1}{3} = r_1 + \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.

(2) (1) より

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AD} - r_1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{14}+2}{3}}$$

$$\mathrm{AF} = \mathrm{AD} - r_2 = \mathrm{AE} - \boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

(3) 線分 $\mathrm{AO_1}$ は $\angle\mathrm{BAD}$ の 2 等分線であり，また線分 $\mathrm{AO_2}$ は $\angle\mathrm{CAD}$ の 2 等分線である．したがって，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BAC} &= \angle\mathrm{BAD} + \angle\mathrm{DAC}\\ &= 2\angle\mathrm{O_1AD} + 2\angle\mathrm{O_2AD}\\ &= 2\theta\end{aligned}$$

余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{3^2+5^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{1}{15}$$

よって，$\cos 2\theta = -\dfrac{1}{15}$.

これを用いて，$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} = \dfrac{7}{15}$.

θ は明らかに鋭角であり，$\cos\theta > 0$．よって，$\cos\theta = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{105}}{15}}$.

また，$\mathrm{AI} = \mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{14}+2}{3}$，$\mathrm{AJ} = \mathrm{AF} = \dfrac{\sqrt{14}+1}{3}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AO_1} &= \sqrt{\mathrm{AI}^2 + {r_1}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}-2}{3}\right)^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

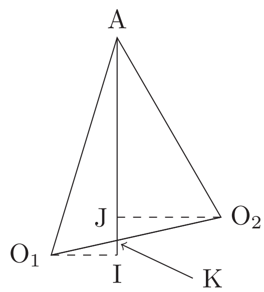
$$\begin{aligned}\mathrm{AO_2} &= \sqrt{\mathrm{AJ}^2 + {r_2}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}-1}{2}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{30}}{3}\end{aligned}$$

よって

$$\triangle\mathrm{AO_1O_2} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{30}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}.$$

別解

線分 $\mathrm{O_1O_2}$ と線分 AD の交点を K とおく．



$\triangle \mathrm{O_1IK}$ と $\triangle \mathrm{O_2JK}$ は相似であるから

$$\mathrm{IK} : \mathrm{JK} = r_1 : r_2$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\mathrm{AK} &= \mathrm{AJ} + \mathrm{JK} \\
&= \mathrm{AJ} + \mathrm{IJ} \times \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\
&= \mathrm{AF} + (\mathrm{AI} - \mathrm{AJ}) \times \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\
&= \mathrm{AF} + (\mathrm{AE} - \mathrm{AF}) \times \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\
\triangle \mathrm{AO_1O_2} &= \triangle \mathrm{AKO_1} + \triangle \mathrm{AKO_2} \\
&= \frac{1}{2} \times \mathrm{AK} \times \mathrm{IO_1} + \frac{1}{2} \times \mathrm{AK} \times \mathrm{JO_2} \\
&= \frac{1}{2} \times \mathrm{AK} \times (\mathrm{IO_1} + \mathrm{JO_2}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \mathrm{AF} + (\mathrm{AF} - \mathrm{AE}) \times \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right\} (r_1 + r_2) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{14} + 1}{3} (r_1 + r_2) + \frac{1}{3} \times r_2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{14} + 1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{14} - 3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14} - 1}{3} \right) \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

直線 $l : y = -x + 3$ および曲線 $C : y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ （ただし，$x > 1$）について，以下の問いに答えなさい.

(1)　点 $(3,\ 0)$ を通り曲線 C と接する接線の方程式を $y = ax + b$ とおくとき，a と b の値を求めなさい.

(2)　l と C の交点の座標をすべて求めなさい.

(3)　l と C で囲まれる図形の面積を求めなさい.

解答

$$l : y = -x + 3,\ C : y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

(1)　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $(x > 1)$ とおく.

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$
$$y - \frac{1}{\sqrt{t-1}} = -\frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}}(x - t)$$

この接線が点 $(3,\ 0)$ を通るとき，

$$-\frac{1}{\sqrt{t-1}} = -\frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}}(3 - t) \iff \quad 2(t-1) = 3 - t$$
$$\iff t = \frac{5}{3}$$

よって，$a = -\dfrac{1}{2\left(\dfrac{5}{3} - 1\right)\sqrt{\dfrac{5}{3} - 1}} = \boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}}$.

また，直線 $y = ax + b$ が点 $(3,\ 0)$ を通るので，$b = -3a = \boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{6}}{8}}$.

(2)　l と C の交点の x 座標を求めると，

$$-x + 3 = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$1 < x < 3$ において，両辺ともに正であるため，辺々を平方した方程式を解けばよい.

$$(-x+3)^2 = \frac{1}{x-1}$$
$$\iff (x^2 - 6x + 9)(x - 1) = 1$$
$$\iff x^3 - 7x^2 + 15x - 10 = 0$$
$$\iff (x - 2)(x^2 - 5x + 5) = 0$$
$$\iff x = 2,\ \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

このうち，$1 < x < 3$ を満たすのは $x = 2,\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ であり，交点の座標は

$$\boldsymbol{(2,\ 1),\ \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

(3)　いま，$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq 2$ において，$-x+3 \geqq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ であるから，求める面積 S は,

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{2} \left\{(-x+3) - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right\} dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\sqrt{x-1}\right]_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{2} \\
&= (-2+6-2) - \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}-1}\right\} \\
&= 2 + \frac{1}{8}(30-10\sqrt{5}) - \frac{15-3\sqrt{5}}{2} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} \\
&= 2 + \frac{15}{4} - \frac{5\sqrt{5}}{4} - \frac{15}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} - 1 \\
&= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}-11}{4}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OB 上に点 D をとり，線分 AD と線分 AB のなす角を x で表す．また，辺 OC の中点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えなさい．

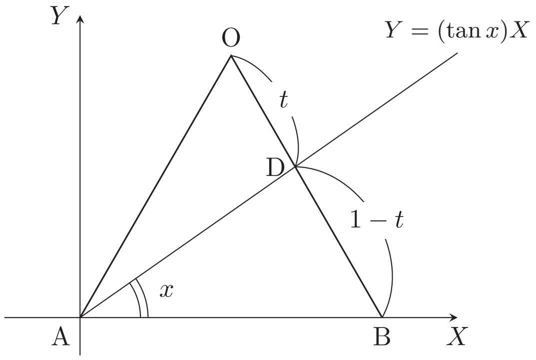
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ および $\tan x$ を用いて表しなさい．

(2) $\angle\mathrm{DAE}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ を x を用いて表し，$\cos\theta$ の最大値を求めなさい．

(3) 三角形 ADE の面積を $\tan x$ の関数として表し，その面積の最初値を与える $\tan x$ の値を求めなさい．

解答

(1) △OAB において下の図のように座標軸を設定する．



$\mathrm{OD}:\mathrm{DB}=t:(1-t)$ と置くとき，点 D は XY 座標上において 2 直線 $Y=(\tan x)X$，$Y=-\sqrt{3}(X-1)$ の交点なので，

$$(\tan x)X=-\sqrt{3}(X-1)$$

$$\Longleftrightarrow X=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan x}\quad\cdots①$$

また，点 D の X 座標は t を用いて表すと $X=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}$ であるから，

$$\frac{1}{2}+\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan x}\Longleftrightarrow t=\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}$$

点 D は OB を $t:(1-t)$ に内分する点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AO}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a}+\frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c}}\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}\mathrm{OD}:\mathrm{DB}&=(\triangle\mathrm{OAD}\text{ の面積}):(\triangle\mathrm{BAD}\text{ の面積})\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right):\frac{1}{2}\cdot1\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin x\\&=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right):\sin x\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x:\sin x\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\tan x:\tan x\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a}+\frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c}}$ である．

(2)　$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|}$ である．(1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AD} &= X \times \frac{1}{\cos\theta} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x} \qquad (\because ①) \\
\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \{t\vec{a}+(1-t)\vec{c}\}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{t\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}+(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)|\vec{c}|^2\right\}.
\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{c}|=1$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{3-t}{4}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{\cos x\{(3\sqrt{3}+\tan x)-(\sqrt{3}-\tan x)\}}{6} \\
&= \frac{\cos x(2\sqrt{3}+4\tan x)}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{2}{3}\sin x}.
\end{aligned}$$

また，このとき

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}\sin(x+\alpha)\ \left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる．$0<x<\dfrac{\pi}{3}$ で x を変化させるとき，$x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる x があり，$\cos\theta$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$.

(3)　(2) より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\dfrac{2}{3}\sin x$ であるから，

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{2}{3}\sin x\right)^2} \\
&= \sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2 x-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin x\cos x-\frac{4}{9}\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

これを用いて，△ADE の面積 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x}\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2 x-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin x\cos x-\frac{4}{9}\sin^2 x}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+\tan x}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{9}\tan x-\frac{4}{9}\tan^2 x}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}{3+2\sqrt{3}\tan x+\tan^2 x}}}. \quad \cdots②
\end{aligned}
$$

ここで，$1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan x = t$ とおき，② のルートの中を $f(t)$ とおく.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}{3+2\sqrt{3}\tan x+\tan^2 x}\\
&= \frac{6-4\sqrt{3}(\sqrt{3}t-\sqrt{3})+5(\sqrt{3}t-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}+\tan x)^2}\\
&= \frac{6-12t+12+15(t^2-2t+1)}{(\sqrt{3}t)^2}\\
&= \frac{15t^2-42t+33}{3t^2}\\
&= \frac{5t^2-14t+11}{t^2}\\
&= \frac{11}{t^2}-\frac{14}{t}+5\\
&= 11\left(\frac{1}{t}-\frac{7}{11}\right)^2+\frac{6}{11}.
\end{aligned}
$$

したがって，$S=\dfrac{1}{4}\sqrt{f(t)}$ は $t=\dfrac{11}{7}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{6}{11}}$ をとる.

このとき，$\tan x=\sqrt{3}(t-1)=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}$.

講評

$\boxed{1}\boxed{2}$（小問集合）例年通りの小問集合であり，すべて基本問題といってより．1 問も落とせない．

$\boxed{3}$（平面図形）計算が煩雑だが，マークシートであることを考えると，(2) までは正解したい．

$\boxed{4}$（数 III 微分法，積分法）方針は極めて基本的であるが，計算を確実に実行できるかが問われる．

$\boxed{5}$（空間ベクトル）計算が非常に煩雑であり，得点は難しい問題．方針は立てられても，複雑な計算を最後までやり切れるかが問われる．(1) も平面図形における発送を必要とし，今回の大問の中で一番難しい問題だったと考えられる．

全体として，計算力・計算速度が問われる出題になっている．計算を間違ってしまうと，時間が足りなくなる．ただし，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ は非常に簡単な問題であるため，ここを素早く解くことができるかがポイントになる．$\boxed{5}$ 以外はしっかり点数を取りたい．計算ミスなども考慮すると，一次合格ラインは 65 %程度と考えられる．