解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2019年 2月5日実施

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(1)　xy 平面上を動く点 P が，最初に座標 $(2,\ 0)$ の位置にある．白玉 2 個，赤玉 1 個，青玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてからもとに戻す．取り出した玉の色によって，次のように P を移動し硬貨をもらう試行を考える．

P が座標 $(m,\ n)$ の位置にあるとき，

- 取り出した玉の色が白色ならば，P は座標 $(m+1,\ n)$ の位置へ移動
- 取り出した玉の色が赤色ならば，P は座標 $(m,\ n+1)$ の位置へ移動
- 取り出した玉の色が青色ならば，P は座標 $(m-1,\ n)$ の位置へ移動

移動後に，P の x 座標と y 座標の和が 0 または 3 のとき，硬貨を 1 枚もらう．

この試行を 4 回続けて行う．

このとき，3 回目の試行で始めて硬貨をもらう確率は $\boxed{（ア）}$ であり，4 回目の試行で硬貨をもらい，かつ，もらう硬貨の総数が 2 枚となる確率は $\boxed{（イ）}$ である．

(2)　$\triangle$ABC において，AB $=4$，BC $=5$，CA $=6$ とする．$\triangle$ABC の重心 G から辺 BC に下ろした垂線を GH とするとき，$\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}$ の値は $\boxed{（ウ）}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　P の座標 $(m,\ n)$ に対して $X=m+n$ とおく．$X=0,\ 3$ となるときに硬貨を 1 枚もらう，1 回の試行において，以下のように事象を設定する．

事象 E：取り出した玉が白色または赤色で，X が 1 増える
事象 F：取り出した玉が青色で，X が 1 減る

最初に $X=2$ にあったので，3 回目の試行で初めて硬貨をもらう場合は，

$$X=2\longrightarrow X=1\longrightarrow X=2\longrightarrow X=3$$

と変化するときである．すなわち事象 $F,\ E,\ E$ の順に起こる場合なので，$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{64}$．

また，4 回目の試行で硬貨をもらい，かつ，もらう硬貨の総数が 2 枚となる場合を考える．4 回目に $X=3$ となることはないので，4 回目には $X=0$ となり硬貨をもらう．

(i)　1 回目と 4 回目に硬貨をもらう場合

$$X=2\longrightarrow X=3\longrightarrow X=2\longrightarrow X=1\longrightarrow X=0$$

と変化するときである．すなわち，事象 $E,\ F,\ F,\ F$ の順に起こる場合なので，$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{256}$．

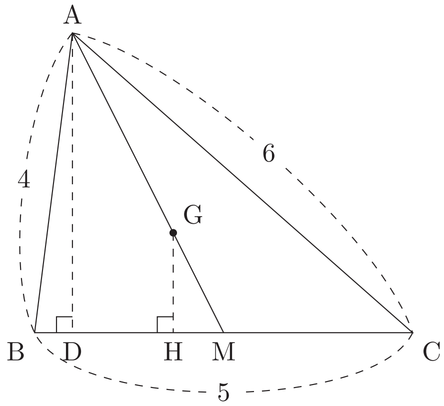
(ii)　2 回目と 4 回目に硬貨をもらう場合

$$X=2\longrightarrow X=1\longrightarrow X=0\longrightarrow X=1\longrightarrow X=0$$
$$X=2\longrightarrow X=1\longrightarrow X=0\longrightarrow X=-1\longrightarrow X=0$$

と変化するときである．すなわち，事象 F，F，E，F または，F，F，F，E の順に起こる場合なので，
$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{128}$.

(i),(ii) より $\dfrac{3}{256}+\dfrac{3}{128}=\mathbf{\dfrac{9}{256}}$.

(2)



図のように点をとる．余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

$\triangle$ABD に注目すると，$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}$.

また，重心 G の性質から，点 M は BC の中点であり，

$$\mathrm{BM}=\frac{5}{2}$$
$$\mathrm{DM}=\mathrm{BM}-\mathrm{BD}=2$$
$$\mathrm{HM}=\frac{1}{3}\mathrm{DM}=\frac{2}{3}$$
$$\mathrm{BH}=\mathrm{BD}+\mathrm{DH}=\frac{11}{6}$$

したがって，$\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\frac{11}{6}}{5}=\mathbf{\dfrac{11}{30}}$.

$\boxed{\text{別解}}$

余弦定理より $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{1}{8}$ である．ここで xy 平面上で B(0, 0)，C(5, 0) とすると，

$$(\text{A の } x \text{ 座標})=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{B}=\frac{1}{2}$$
$$(\text{G の } x \text{ 座標})=\frac{\frac{1}{2}+0+5}{3}=\frac{11}{6}=\mathrm{BH}$$

よって

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\frac{\frac{11}{6}}{5}=\mathbf{\frac{11}{30}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{c}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ より，

$$\begin{aligned}
|\mathrm{AC}|^2 &= |\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}|^2 \\
\iff 6^2 &= 5^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + 4^2 \\
\iff \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

また，点 G は △ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$ であり，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BG}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{c} \\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|^2) \\
&= \frac{55}{6} \\
\mathrm{BC} \cdot \mathrm{BH} &= \frac{55}{6} \\
\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}} &= \frac{\mathrm{BC} \cdot \mathrm{BH}}{\mathrm{BC}^2} \\
&= \frac{55}{6} \cdot \frac{1}{5^2} \\
&= \frac{11}{30}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

a，b は定数で $a>1$ とする．2 つの曲線 $C_1: y=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$，$C_2: y=\dfrac{e^x}{a^2}+b$ が共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 の凹凸および変曲点を調べ，C_1 の概形を描け．

(2)　点 P の座標と b を a で表せ．

(3)　C_1，C_2 と y 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a で表せ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてよい．

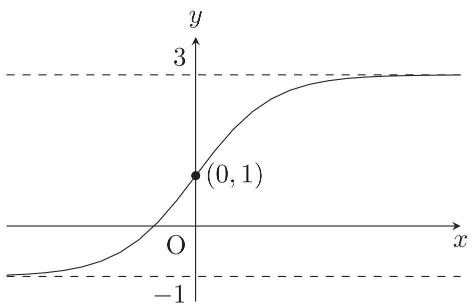
解答

(1)　$f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=3-\dfrac{4}{e^x+1}$ とする．

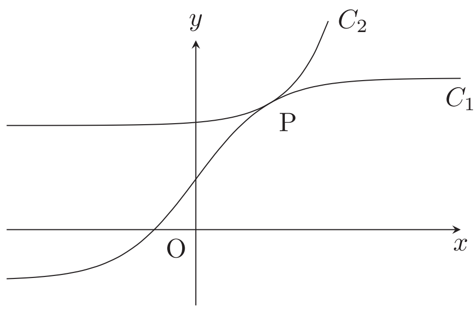
$f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}>0$，$f''(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^3}(1-e^x)$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$	/	$+$	$+$	$+$	/
$f''(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	(-1)	↗	1	↗	(3)

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ で，変曲点は $(0,\ 1)$ である．これより，C_1 の概形は次のようになる．



(2)



点 P の x 座標を t とする．

点 P において，C_1 と C_2 は共通接線をもつことから，$g(x)=\dfrac{e^x}{a^2}+b$ とすると

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3e^t-1}{e^t+1}=\dfrac{e^t}{a^2}+b & \cdots ① \\ \dfrac{4e^t}{(e^t+1)^2}=\dfrac{e^t}{a^2} & \cdots ② \end{cases}$$

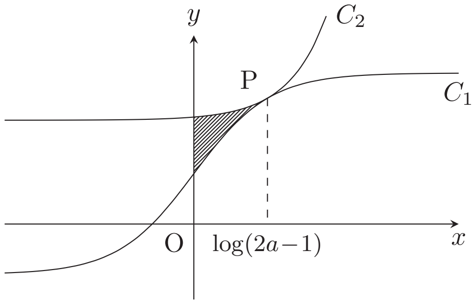
が成り立つ．

② から $a^2=\dfrac{(e^t+1)^2}{4}$ である．$a>1$ に注意すると $a=\dfrac{e^t+1}{2}$ である．ゆえに $e^t=2a-1\quad\cdots③$.

これを ① に代入して $b=\dfrac{(6a-2)(2a-2)}{(2a)^2}=3-\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{a^2}$.

また，③ から $t=\log(2a-1)$ なので，点 P の座標は $\mathrm{P}\left(\log(2a-1),\ 3-\dfrac{2}{a}\right)$.

(3)



C_1，C_2 と y 軸で囲まれた部分は上図の斜線部分になるから，

$$\begin{aligned}
S(a)&=\int_0^{\log(2a-1)}\left(\frac{e^x}{a^2}+3-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}-3+\frac{4}{e^x+1}\right)dx\\
&=\int_0^{\log(2a-1)}\left(\frac{e^x}{a^2}-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{4}{e^x+1}\right)dx\\
&=\left[\frac{e^x}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a}\right)x\right]_0^{\log(2a-1)}+4\int_0^{\log(2a-1)}\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx\\
&=\frac{2a-2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a}\right)\log(2a-1)+4\left\{\log(2a-1)-\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^{\log(2a-1)}\right\}\\
&=\frac{2a-2}{a^2}+\frac{1-4a}{a^2}\log(2a-1)+4\log\frac{2a-1}{2a}+4\log 2\\
&=\frac{2a-2}{a^2}+\frac{1-4a}{a^2}\log(2a-1)+4\log\left(1-\frac{1}{2a}\right)+4\log 2\\
&=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}+\frac{\log(2a-1)}{2a-1}\cdot\left(\frac{1}{a}-4\right)\left(2-\frac{1}{a}\right)+4\log\left(1-\frac{1}{2a}\right)+4\log 2
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\log(2a-1)}{2a-1}=\lim_{X\to\infty}\frac{\log X}{X}=0$ であることに注意して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)=\mathbf{4\log 2}$.

$\boxed{3}$

m, n は自然数の定数とする．自然数 x, y が不等式

$$y \leqq -x^2 + 20nx,\ y \geqq \frac{12n}{m}x$$

をみたすとき，m の値に応じて，$y - x$ の最大値と，そのときの x, y の値を n で表せ．

解答

x, y を実数とみて，連続関数として考える．

$$\text{放物線 } C : y = -x^2 + 20nx \qquad \cdots ①$$

$$\text{直線 } l : y = \frac{12n}{m}x \qquad \cdots ②$$

$$\text{領域 } D : \begin{cases} y \leqq -x^2 + 20nx \\ y \geqq \dfrac{12n}{m}x \end{cases} \qquad \cdots ③$$

$y = x - k$ とおくと，$y = x + k$ は傾き 1 の直線を表す．これが C と接するとき，① より $y' = -2x + 20$.
$y' = 1$ より，$-2x + 20n = 1$，すなわち $x = 10n - \dfrac{1}{2}$.
したがって，x は自然数なので，点 $(x,\ y)$ が C 上にあるとき，

$$(x,\ y) = (10n - 1,\ 100n^2 - 1) \text{ または } (10n,\ 100n^2)$$

のどちらかで k は最大になる．
また，C と l の交点は ①, ② から

$$-x^2 + 20nx = \frac{12n}{m}x \iff x = 0,\ 20n - \frac{12n}{m}$$

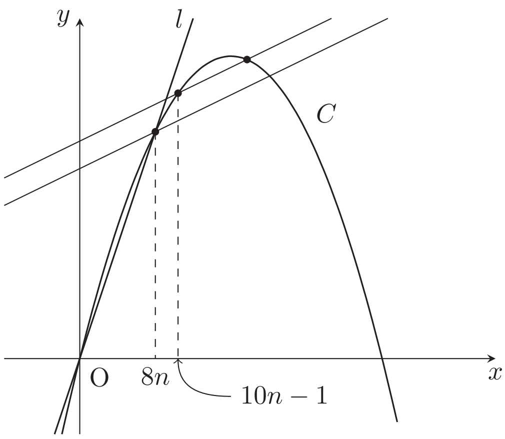
である．

(i)　$m = 1$ のとき

n は自然数であるから

$$10n - 1 > 20n - \frac{12n}{1} = 8n$$

したがって，k が最大となるのは，$(x,\ y) = (8n,\ 96n^2)$ のときであり $y - x = 96n^2 - 8n$ である．



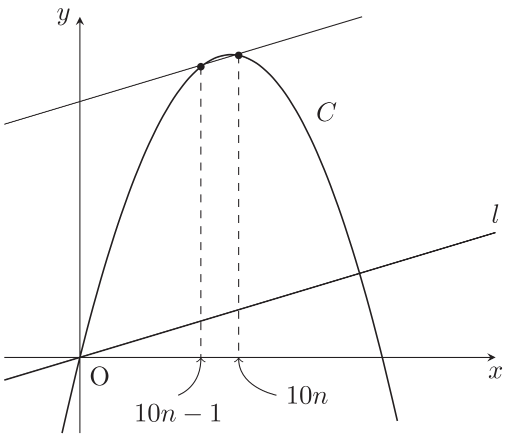
(ii)　$m \geqq 2$ のとき

$$20n - \frac{12n}{m} \geqq 20n - \frac{12n}{2} > 10n$$

したがって，k が最大となるのは，

$$(x,\ y)=(10n-1,\ 100n^2-1)\ \text{または}\ (10n,\ 100n^2)$$

のときであり，ともに $y-x=100n^2-10n$ である．



したがって，

- $m=1$ のとき
  最大値 $\boldsymbol{96n^2-8n}$，$(x,\ y)=\boldsymbol{(8n,\ 96n^2)}$．
- $m \geqq 2$ のとき
  最大値 $\boldsymbol{100n^2-10n}$，$(x,\ y)=\boldsymbol{(10n-1,\ 100n^2-1)}$ または $\boldsymbol{(10n,\ 100n^2)}$．

$\boxed{4}$

方程式 $x^3+1=0$ の解のうち，虚部が正であるものを α とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(-1)$，$\mathrm{C}(\overline{\alpha})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える $\triangle\mathrm{ABC}$ の周上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して原点 O を端点とし，$\mathrm{P}(z)$ を通る半直線上に $|w|=\dfrac{1}{|z|}$ をみたす点 $\mathrm{Q}(w)$ をとるとき，次の問いに答えよ．ただし，複素数 γ に共役な複素数を $\overline{\gamma}$ で表し，複素数平面上で複素数 γ を表す点 G を $\mathrm{G}(\gamma)$ と書く．

(1) $w=\dfrac{1}{\overline{z}}$ となることを示せ．

(2) $\mathrm{P}(z)$ が $\triangle\mathrm{ABC}$ の周上を動くとき，$\mathrm{Q}(w)$ が描く図形によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 点 Q は半直線 OP 上に存在するので，ある実数 t を用いて

$$w=tz\ (t>0)$$

とおくことができる．このとき，

$$|w|=|tz|\iff|w|=t|z|$$

であり，$|w|=\dfrac{1}{|z|}$ に代入すると，

$$t|z|=\frac{1}{|z|}\iff t=\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{z\overline{z}}$$

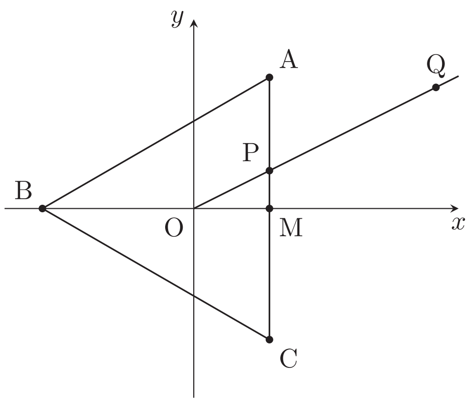
となるため

$$w=\frac{1}{z\overline{z}}z=\frac{1}{\overline{z}}.$$

(2) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$

α は虚部が正なので，$\alpha+1\fallingdotseq 0$ であるため，α は $\alpha^2-\alpha+1=0$ を満たす．これを解くと $\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，α の虚部は正であるから，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ である．

$z=x+yi$，$w=X+Yi$，線分 AC の中点を M とし，点 P が線分 AM 上にあるときを考える．



このとき

$$x=\frac{1}{2},\ 0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots①$$

である．(1) より，

$$w=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}i$$

であるから，① より

$$w=\frac{2}{4y^2+1}+\frac{4y}{4y^2+1}i,\ 0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

したがって，

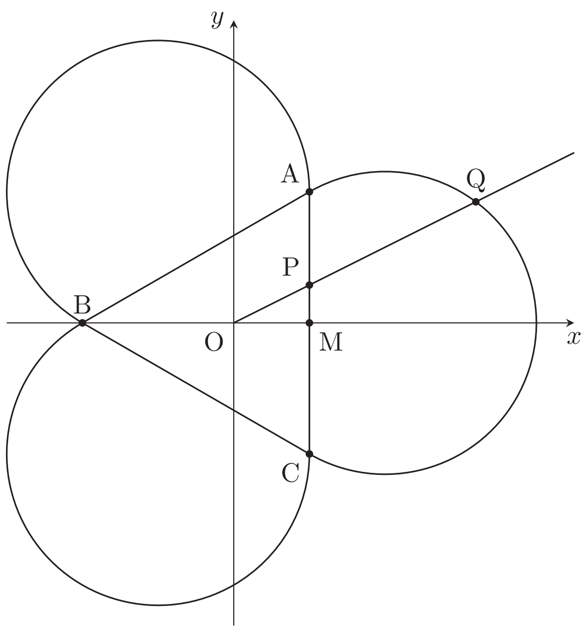
$$X=\frac{2}{4y^2+1},\ Y=\frac{4y}{4y^2+1}\quad\cdots②$$

$0\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $0\leqq y^2\leqq\dfrac{3}{4}$ である．② より $\dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 2\quad\cdots③$ ．

② より $Y=2yX$ であり，$X\fallingdotseq 0$ から $y=\dfrac{Y}{2X}$．よって

$$\begin{aligned}X&=\frac{2}{4\left(\dfrac{Y}{2X}\right)^2+1}=\frac{2}{\dfrac{Y^2}{X^2}+1}\\ &\Longleftrightarrow X^2+Y^2-2X=0\\ &\Longleftrightarrow (X-1)^2+Y^2=1\end{aligned}$$

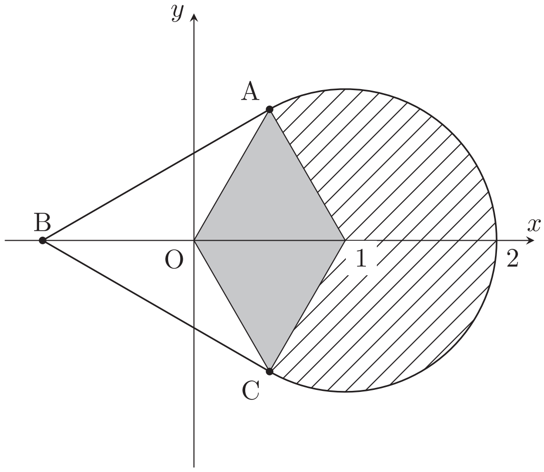
したがって，点 P が線分 AM 上を動くとき，点 Q は円弧 $(X-1)^2+Y^2=1,\ \dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 2,\ Y\geqq 0$ を描く．図形の対称性から，次の図のようになる．



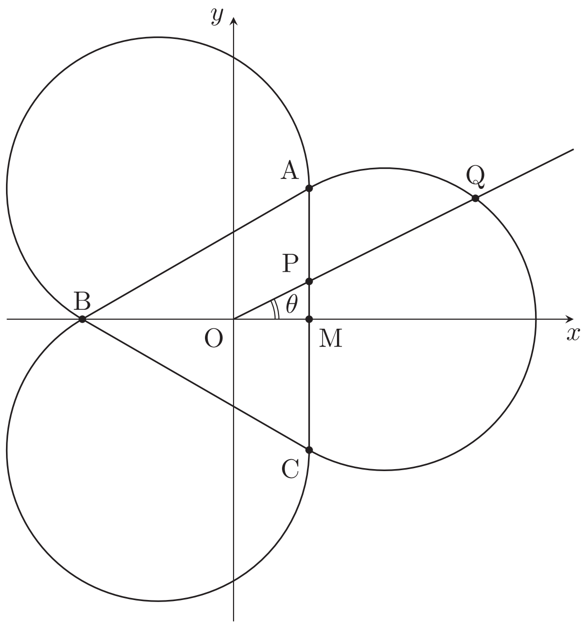
したがって，囲まれた図形の面積 S は,

$$\frac{S}{3}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$

$$S=\boldsymbol{2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$



別解



$|z| = r_1$, $|w| = r_2$, $\arg z = \theta$ とおく．点 P が線分 AM 上を動くとき $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$\mathrm{OP}\cos\theta = \mathrm{OM}$$

$$\Longleftrightarrow r_1\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow r_1 = \frac{1}{2\cos\theta}$$

(1) より

$$r_2 = \frac{1}{r_1} = 2\cos\theta$$

点 P が AM 上を動くときに点 Q が描く図形の極方程式は $r = 2\cos\theta$ である．

対称性から求める図形の面積は

$$\frac{S}{6} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\begin{aligned} S &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta)^2 d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2(1+2\cos\theta) d\theta \\ &= 3\Big[2\theta + \sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$（小問集合）

(1)　確率

一見ややこしそうな設定だが，事象をまとめると計算はシンプル．ここは落とせない．

(2)　平面図形

教科書の練習問題レベル．様々な解法が選択できる．ここも落としてはいけないだろう．

$\boxed{2}$（微分法・極限）

計算結果は煩雑だが，計算量もそれほど多くなく，ミスに気を付けて丁寧に解き進めて欲しい．最後の極限計算は，上手く変形して与えられた形を作りたい．

$\boxed{3}$（格子点と最大値）

x，y が実数であるときと同様に考え，領域を図示し，直線との共有点を考えるのだが，直線の傾きを考えると場合分けが必要になる．また x，y が自然数である点にも，気を付けなければならない．数学力が試される問題だろう．

$\boxed{4}$（反転）

複素数平面の典型問題．一度は解いたことがあるテーマだろう．ここの出来で差がつきやすいだろう．

全体として易化しており，例年よりも数学で差がつきやすいセットだった．7 割とって欲しいが，1 次突破ラインは 60 %強だろう．