

順天堂大学医学部 数学

2019年 2月4日実施

1 に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の がある場合は同一の値が入る。

(1) (a) $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$, $w = z + z^2 + z^4$ とする。

$$w + \bar{w} = \text{アイ}, w \cdot \bar{w} = \text{ウ} \text{ より}$$

$$\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{8}{7}\pi = \frac{\text{エオ}}{\text{カ}}, \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}} \text{ を得る。}$$

(b) $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$ とすると $|\alpha + \beta| = \frac{\sqrt{\text{ケ}} - \sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$, $|\alpha - \beta| =$

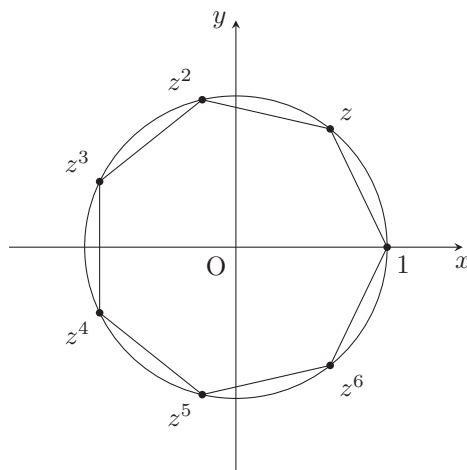
$$\frac{\sqrt{\text{シ}} - \sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}} \text{ (ただし } \text{シ} > \text{ス} \text{) となる。}$$

γ の実部が正で, α, β, γ が複素数平面上で正三角形となるときの,

$$\gamma = \frac{\text{ソ} + \sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}} + \frac{\text{ツ} + \sqrt{\text{テ}}}{\text{ト}} i \text{ である。}$$

解答

(1) (a) $z = \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi$, $w = z + z^2 + z^4 \dots \textcircled{1}$ とする。



$$|z| = 1 \text{ より } z\bar{z} = 1 \text{ すなわち } \bar{z} = \frac{1}{z} \dots \textcircled{2}.$$

また, $z^7 = 1 \dots \textcircled{3}$ であり, $z \neq 1$ より $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \dots \textcircled{4}$ である.

$$\begin{aligned}\overline{w} &= \overline{z} + \overline{z^2} + \overline{z^4} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \quad (\textcircled{2} \text{より}) \\ &= z^6 + z^5 + z^3 \dots \textcircled{5} \quad (\textcircled{3} \text{をかけた})\end{aligned}$$

①, ④, ⑤ より

$$\begin{aligned}w + \overline{w} &= (z + z^2 + z^4) + (z^6 + z^5 + z^3) \\ &= z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 - 1 \\ &= -1 \\ w \cdot \overline{w} &= (z + z^2 + z^4)(z^6 + z^5 + z^3) \\ &= z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7 \\ &= 3 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 \\ &= 2\end{aligned}$$

である.

解と係数の関係より, $w, \overline{w}$ を解に持つ 2 次方程式は $t^2 + t + 2 = 0$ である. これを解くと $t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ となる.

$w = z + z^2 + z^4$ において $\sin \frac{4}{7}\pi > \sin \frac{6}{7}\pi$ なので,

$$\begin{aligned}\text{Im}(w) &= \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi \\ &= \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi - \sin \frac{6}{7}\pi > 0\end{aligned}$$

であるから, $w = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$.

したがって

$$\begin{aligned}\text{Re}(w) &= \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{8}{7}\pi = -\frac{1}{2} \\ \text{Im}(w) &= \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

(b) $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &= \left| \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{\sqrt{3} - i}{2} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right| \cdot |1 - i| \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\beta - \alpha| \\ &= \left| \frac{\sqrt{3} - i}{2} - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{3} + 1}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right| \cdot |1 - i| \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

また, α , β , γ が複素数平面上で正三角形となるときの,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \gamma - \alpha &= (\beta - \alpha) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} (1 - i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \pm \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \mp \frac{1}{2}i \text{ (複号同順)} \end{aligned}$$

よって $\gamma = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$ または $-1 - i$ である.

実部が正であったため, $\gamma = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$.

1

(2) 1 から 8 までの 8 個の数から異なる数を選んで並べることで 2 桁以上 4 桁以下の正の整数をつくる. このようにしてつくられた正の整数の集合を A とする. A の要素であり, どの 2 つの桁の和も 9 にならない数からなる集合を A_1 とする. A の要素であり, 3 桁以下の数でどの 2 つの桁の和も 9 にならない数からなる集合を A_2 とする.

- 1) $x \in A_1$ であることは, $x \in A_2$ であることの ア.
- 2) A の要素の個数は イウエオ 個である.
- 3) A_1 の要素の個数は カキク 個であり, A_2 の要素の個数は ケコサ 個である.
- 4) A の要素で小さい方から数えて 600 番目の数は シスセソ である.

ただし, ア は以下の中から選択せよ.

- (a) 必要条件であるが, 十分条件ではない
- (b) 十分条件であるが, 必要条件ではない
- (c) 必要十分条件である
- (d) 必要条件でも, 十分条件でもない

解答

- 1) A の要素で 4 桁のもの (例: 1234) は A_1 に含まれるが, A_2 には含まれないため,
 $x \in A_1 \implies x \in A_2$ は偽.
 一方 $x \in A_2 \implies x \in A_1$ は真であるから, $x \in A_1$ であることは $x \in A_2$ であるための必要条件であるが十分条件ではない. したがって (a) である.
- 2) A の要素のうち 2 桁, 3 桁, 4 桁のものを順に数えると,

$$4 \text{ 桁のもの} : 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

$$3 \text{ 桁のもの} : 8 \times 7 \times 6 = 336$$

$$2 \text{ 桁のもの} : 8 \times 7 = 56$$

であるため, すべてを足して **2072** 個.

- 3) 1 から 8 までの 8 個の数から異なる数を選んで並べ, 2 桁以上, 4 桁以上の正の整数をつくる時, ある数 N を並べると, 次に並べる数は, N と $9 - N$ を除く 6 通り, 以下同様に 2 種類ずつ並べることができる数が減っていくので, A_1 の要素の個数を数えると

$$4 \text{ 桁のもの} : 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$$

$$3 \text{ 桁のもの} : 8 \times 6 \times 4 = 192$$

$$2 \text{ 桁のもの} : 8 \times 6 = 48$$

であるため, すべてを足して **624** 個.

また A_2 の要素の個数は, 2 桁のものと 3 桁のものの個数を足せばよく, **240** 個.

- 4) 2) の計算より, 3 桁以下の要素の個数は $56 + 336 = 392$ 個. 4 桁のもののうち, 千の位が 1 であるものの個数は $7 \times 6 \times 5 = 210$ 個ある. $392 + 210 = 602$ であるため, 千の位が 1 であるもののうち, 大きい方から 3 番目のものを求めればよい.

1876, 1875, 1874, ... であるため, 求める数は **1874** である.

1

(3) 下図は

$$\begin{cases} x = \sin 8\theta \\ y = \sin 6\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

であらわされるリサージュ曲線 L で、下図の実線部分は点 $A(0, 1)$ を通る曲線 L の一部である。また、点 $B(0, \beta)$ ($-1 < \beta < 0$) は L 上の点である。

点 A では $\theta = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}\pi$ であり、 B では小さい順に $\theta = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}\pi$, $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}\pi$ で、 $\beta = \frac{\text{キ}}{\text{ケ}}\sqrt{\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}}$

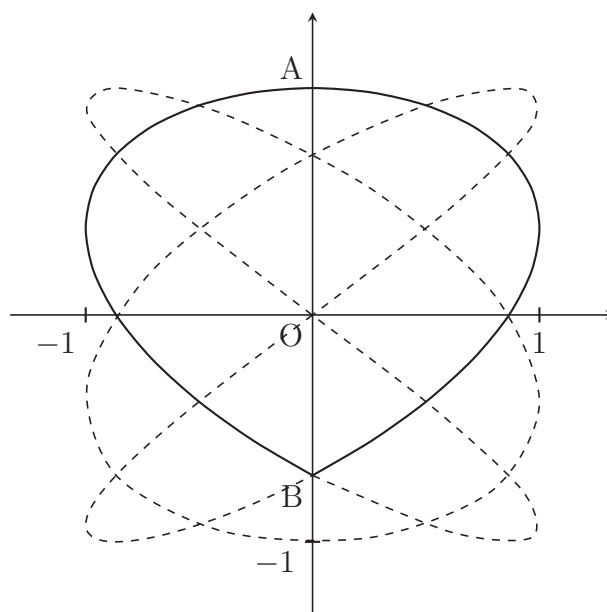
である。

実線で囲まれた図形のうち $x \geq 0$ となる部分の面積は、 $x(\theta) = \sin 8\theta$, $y(\theta) = \sin 6\theta$ とすると

$$\int_{\beta}^1 x dy = \int_b^t \text{コ} (\sin \text{サ} \theta + \sin \text{シス} \theta) d\theta$$

と表すことができる。ここで、 $b = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}\pi$, $t = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}\pi$ である。

よって実線で囲まれた図形全体の面積は $\frac{\text{タチ}}{\text{テ}}\sqrt{\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}}$ となる。



解答

(3)

$$L : \begin{cases} x = \sin 8\theta & \dots \text{①} \\ y = \sin 6\theta & \dots \text{②} \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

① より、 $x = 0$ となるのは

$$\theta = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{8}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{8}\pi, \pi$$

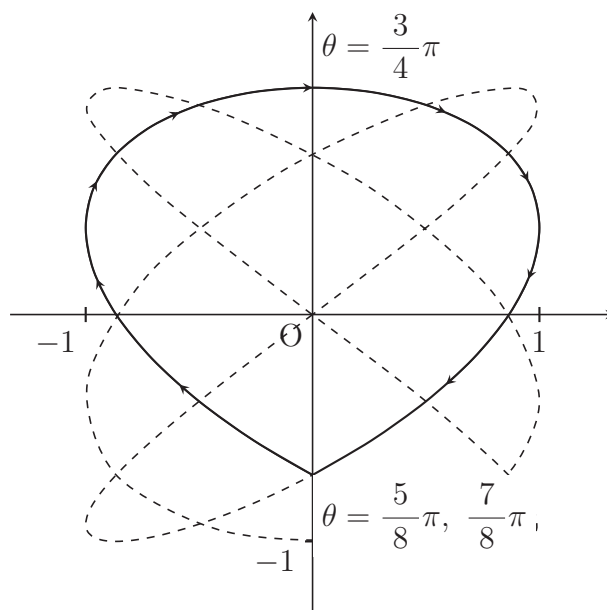
このとき、② よりこれに対応する y の値は順に

$$0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$$

となる。したがって、点 $A(0, 1)$ となるのは $\theta = \frac{3}{4}\pi$ であり、 $B(0, \beta)$ ($-1 < \beta < 0$) は $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、

このときの θ は小さい順に $\theta = \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$ である。

また、実線で囲まれた図形のうち $x \geq 0$ となる部分の面積 S は点 $(x(\theta), y(\theta))$ が図のように進行する。



よって、

$$S = \int_{\beta}^1 x dy = \int_{\theta=\frac{7}{8}\pi}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} x(\theta) \cdot \frac{dy}{d\theta} d\theta$$

ここで、 $x(\theta) = \sin 8\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 6 \cos 6\theta$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta=\frac{7}{8}\pi}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} 6 \sin 8\theta \cos 6\theta d\theta \\ &= \int_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 3(\sin 14\theta + \sin 2\theta) d\theta \\ &= \left[-\frac{3}{14} \cos 14\theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta \right]_{\frac{7}{8}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

よって実線で囲まれた図形全体の面積は、対称性に注意して

$$2S = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

2

に適する解答をマークせよ。ただし、同じ記号の がある場合は同じ値が入る。

関数 $f(x)$ を用いて漸化式が $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で与えられる数列 $\{x_n\}$ について考える。

(1) $x_1 = 3$, $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$ とすると $x_2 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$, $x_2 = \frac{\text{エオカ}}{\text{キク}}$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\text{ケコ}}{\text{タ}}$ となる。

(2) $x_1 = 3$, $f(x) = \frac{3}{4}[x] + 3$ とすると $x_2 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$, $x_2 = \frac{\text{サシ}}{\text{ス}}$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$ となる。

ただし、実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数とする。

(3) $x_1 = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{3x}{1+x}$ とすると, $x_5 = \frac{\text{チツ}}{\text{テト}}$, $x_9 = \frac{\text{ナニヌネ}}{\text{ノハヒフ}}$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\text{ヘ}}{\text{タ}}$ となる。

(4) $f(x) = ax(1-x)$ (a は実数) とする。 $0 \leq x_1 \leq 1$ を満たすすべての x_1 に対して $0 \leq x_n \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots$) が成り立つための必要十分条件は $\frac{\text{ホ}}{\text{タ}} \leq a \leq \frac{\text{マ}}{\text{タ}}$ である。このうちで $x_1 = x_2$ となる 0 以外の x_1 が

存在するのは $\frac{\text{ミ}}{\text{タ}} < a \leq \frac{\text{マ}}{\text{タ}}$ のときで、このような x_1 は a を用いて $x_1 = \frac{\text{ム}}{\text{タ}} - \frac{\text{メ}}{a}$ と表

される。同様に $x_1 < x_2$, $x_3 = x_1$ を満たす x_1 が存在するのは $\frac{\text{モ}}{\text{タ}} < a \leq \frac{\text{マ}}{\text{タ}}$ のときで、 x_1 は a を

用いて $x_1 = \frac{a + \frac{\text{ヤ}}{\text{タ}} - \sqrt{(a + \frac{\text{ユ}}{\text{タ}})(a - \frac{\text{ヨ}}{\text{タ}})}}{2a}$ と表される。

解答

(1) $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で与えられる数列 $\{x_n\}$ に対し, $x_1 = 3$, $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$ のとき

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 3 \iff x_{n+1} - 12 = \frac{3}{4}(x_n - 12)$$

と変形できるから、一般項は

$$\begin{aligned} x_n - 12 &= (x_1 - 12) \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \\ &= -9 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$x_n = 12 - 9 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

である。

こうして $x_2 = \frac{21}{4}$, $x_3 = \frac{111}{16}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 12$.

(2) $x_1 = 3$, $f(x) = \frac{3}{4}[x] + 3$ のとき

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}[x_n] + 3$$

となるので、

$$x_2 = \frac{3}{4}[x_1] + 3 = \frac{3}{4}[3] + 3 = \frac{21}{4}$$

$$x_3 = \frac{3}{4}[x_2] + 3 = \frac{3}{4} \left[\frac{21}{4} \right] + 3 = \frac{27}{4}$$

である.

さらに計算を続けると

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{27}{4} \right] + 3 = \frac{3}{4} \cdot 6 + 3 = \frac{15}{2}, & x_5 &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{15}{2} \right] + 3 = \frac{3}{4} \cdot 7 + 3 = \frac{33}{4} \\x_6 &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{33}{4} \right] + 3 = \frac{3}{4} \cdot 8 + 3 = 9, & x_7 &= \frac{3}{4} \cdot [9] + 3 = \frac{3}{4} \cdot 9 + 3 = \frac{39}{4} \\x_8 &= \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{39}{4} \right] = \frac{3}{4} \cdot 9 + 3 = \frac{39}{4}\end{aligned}$$

であるため, x_n ($n \geq 7$)HA, $x_n = \frac{39}{4}$ となる. したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{39}{4}$.

(3) $x_1 = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{3x}{1+x}$ のとき

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n}$$

である. 帰納的に $x_n \neq 0$ であるから, この漸化式の両辺の逆数を取ることができ,

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3} \iff \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} \right)$$

と変形できる. 数列 $\left\{ \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} \right\}$ が初項 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列をなすことがわかるので,

一般項は

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \iff x_n = \frac{2}{3^{-n+2} + 1}$$

と求まる. したがって, $x_5 = \frac{27}{14}$, $x_9 = \frac{2187}{1094}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

(4) $f(x) = ax(1-x)$ のとき, $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ である. $0 \leq x_1 \leq 1$ を満たすすべての x_1 について $0 \leq x_n \leq 1$ が成り立つのであれば $0 \leq x_2 \leq 1$ である. (すなわち, $0 \leq x_2 \leq 1$ が必要条件となる.)

この条件は,

$$0 \leq x_2 = ax_1(1-x_1) \leq 1$$

である. これは $0 \leq x \leq 1$ における $y = ax(1-x)$ の値域を考えればよい. $x = 0, 1$ のとき最小値 0 , $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{a}{4}$ をとるので,

$$0 \leq \frac{a}{4} \leq 1 \iff 0 \leq a \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

逆にこのとき, 帰納的に

$$0 \leq x_n \leq 1 \implies 0 \leq x_{n+1} \leq 1$$

が示せるから十分条件でもある. よって, $0 \leq a \leq 4$ が必要十分条件である.

この条件の下で, $x_1 \neq 0$ となる x_1 に対して, $x_1 = x_2$ となるとき

$$x_1 = ax_1(1-x_1) \iff x_1\{1-a(1-x_1)\} = 0$$

$x_1 \neq 0$ であるから, $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$.

このような x_1 が存在するのは

$$0 < x_1 \leq 1 \iff 0 < 1 - \frac{1}{a} \leq 1 \iff 1 < a$$

のとき、① と合わせて $1 < a \leq 4$.

同様に $x_1 < x_2$, $x_3 = x_1$ となる x_1 が存在する条件は,

$$\begin{aligned} x_3 &= ax_2(1 - x_2) \\ &= a\{ax_1(1 - x_1)\}\{1 - ax_1(1 - x_1)\} \end{aligned}$$

であるから, $x_1 = x_3$ となる条件は

$$\begin{aligned} a\{ax_1(1 - x_1)\}\{1 - ax_1(1 - x_1)\} &= x_1 \\ \iff a^2(1 - x_1)(ax_1^2 - ax_1 + 1) &= 1 \\ \iff a^3x_1^3 - 2ax_1^2 - a^2(a + 1)x_1 + a^2 - 1 &= 0 \quad \dots ② \end{aligned}$$

$x_1 = x_3$ である場合は $x_1 = x_2 = x_3$ を含むため $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$ を解に持つことは明らかで, ② は

$$\{ax_1 - (a - 1)\}\{a^2x_1^2 + (-a^2 - a)x_1 + (a + 1)\} = 0$$

と因数分解できる. よって, $x_1 < x_2$, $x_1 = x_3$ となる解が存在するには,

$a^2x_1^2 + (-a^2 - a)x_1 + (a + 1) = 0 \quad \dots ③$ が実数解をもつことが必要である.

この方程式の判別式を D とすると, $D \geq 0$ から

$$\begin{aligned} D &= \{-a(a + 1)\}^2 - 4a^2(a + 1) \geq 0 \\ \iff a^2(a + 1)(a - 3) &\geq 0 \end{aligned}$$

つまり, $a \leq -1$, $a = 0$, $3 \leq a$ が必要である.

このとき, 解の公式により,

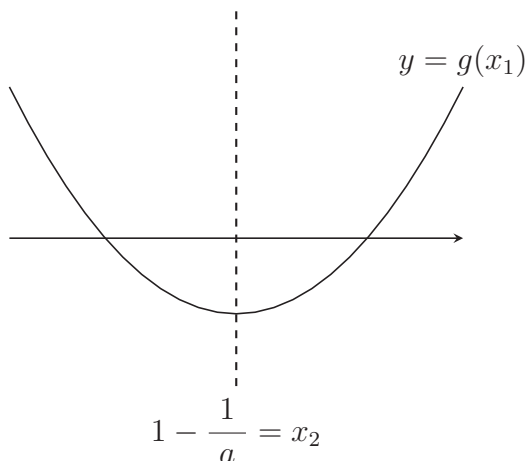
$$x_1 = \frac{a^2 + a \pm \sqrt{a^2(a + 1)(a - 3)}}{2a^2} = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a} \quad \dots ⑤$$

となる. また, $x_1 < x_2$ から ③ は $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$ を解に持たないから

$$a^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + (-a^2 - a) \left(1 - \frac{1}{a}\right) + a + 1 \neq 0 \iff a \neq 3 \quad \dots ⑥$$

①, ④, ⑥ より $3 < a \leq 4$.

また, ③ の左辺を $g(x_1)$ とおけば, $3 < a$ で $g\left(1 - \frac{1}{a}\right) < 0$ となるから, グラフより, $x_1 < x_2$ を満たすのは, ⑤ のうち小さいほうである.



したがって,

$$x_1 = \frac{a+1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}.$$

別解

モ 以降

$x_2 = f(x_1) = a(x_1 - x_1^2)$, $x_3 = f(x_2) = a(x_2 - x_2^2)$ より, $x_3 = x_1$ のとき,

$$\begin{cases} x_2 = a(x_1 - x_1^2) \\ x_1 = a(x_2 - x_2^2) \end{cases} \quad (x_1 < x_2)$$

$x_1 = s$, $x_2 = t$ とおくと,

$$\begin{cases} t = a(s - s^2) & \dots \textcircled{7} \\ s = a(t - t^2) \end{cases} \quad (s < t)$$

両辺の差をとると,

$$t - s = a\{-(t - s) + (t^2 - s^2)\}$$

$t - s \neq 0$ で割ると,

$$1 = a(-1 + s + t)$$

$a = 0$ と仮定すると, $x_1 = x_2 = 0$ となり矛盾するから $a \neq 0$ であり,

$$s + t = 1 + \frac{1}{a} \quad \dots \textcircled{8}$$

さらに $\textcircled{7}$ より, $t = as(1 - s)$ であり, $\textcircled{8} \iff 1 - s = t - \frac{1}{a}$ を代入すると,

$$t = as \left(t - \frac{1}{a} \right) \iff t = ast - s$$

したがって,

$$st = \frac{s+t}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \quad \dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8}$, $\textcircled{9}$ より, s , t は次の 2 次方程式の 2 解である.

$$\begin{aligned} X^2 - \left(1 + \frac{1}{a}\right)X + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) &= 0 \\ \iff (aX)^2 - (a+1)(aX) + (a+1) &= 0 \quad \dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

$s < t$ より, この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよいから,

$$(a+1)^2 - 4(a+1) = (a+1)(a+3) > 0 \quad \dots \textcircled{11}$$

ただし, $0 < a \leq 4$ より $\textcircled{11} \iff a > 3$ であるから, 求める a の条件は, $3 < a \leq 4$ である.

また, $\textcircled{10}$ を解くと,

$$aX = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2} \iff X = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

となり, $s < t$ であるから,

$$x_1 = s = \frac{a+1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}.$$

3

- (1) 1050 と 819 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ.
- (2) 2つの正の整数 a, b ($a < b$) があり, b を a で割った余りを r とする. $r \neq 0$ のとき, a, b の公約数 c は r の公約数 c は r の約数であることを示せ.
- (3) 2つの正の整数 a, b ($a < b$) があり, それらの最大公約数を m とする. このとき, ある整数 s, t を用いて $m = sa + tb$ と表されることを示せ.

解答

(1)

$$1050 = 819 \cdot 1 + 231$$

$$819 = 231 \cdot 3 + 126$$

$$231 = 126 \cdot 1 + 105$$

$$126 = 105 \cdot 1 + 21$$

$$105 = 21 \cdot 5$$

以上の計算により, 1050 と 819 の最大公約数は **21** である.

(2) b を a で割ったときの商を q とすると,

$$b = aq + r \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに, a, b をその公約数 c で割ったときの商を a', b' とすると,

$$\textcircled{1} \iff cb' = ca'q + r \iff c(b' - a'q) = r$$

$b' - ca'$ は整数であるから, c は r の約数である.

(3) 以下, 2つの正の整数 u, v の最大公約数を (u, v) と表す.

$x_0 = b, x_1 = a$ とおく.

さらに自然数 n に対し, x_{n-1} を x_n で割ったときの商を y_n, x_{n+1} と定める.

$$x_0 = x_1 y_1 + x_2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x_1 = x_2 y_2 + x_3$$

$$x_2 = x_3 y_3 + x_4$$

$$\vdots$$

ただし, 余りは割る数よりも小さいから $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$ となり, いずれは 0 になるので, そこで終了とする.

したがって, ある自然数 N に対して,

$$x_{N-3} = x_{N-2} y_{N-2} + x_{N-1} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$x_{N-2} = x_{N-1} y_{N-1} + x_N \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$x_{N-1} = x_N y_N \quad \cdots \textcircled{5}$$

また (2) より, ②において x_2 は x_0, x_1 の任意の公約数で割り切れる.

同様に, x_0 は x_1, x_2 の任意の公約数で割り切れる.

したがって, 「 x_0, x_1 の公約数の集合」と「 x_1, x_2 の公約数の集合」は一致し, その中の最大の要素である最大公約数も一致するから,

$$m = (x_0, x_1) = (x_1, x_2)$$

以降も帰納的に考えると,

$$m = (x_0, x_1) = (x_1, x_2) = (x_2, x_3) = \cdots = (x_{N-1}, x_N)$$

となる.

⑤において, x_{N-1}, x_N を m で割ったときの商を k, l (k, l は互いの素) とすると,

$$\textcircled{5} \iff mk = mly_N \iff \frac{k}{l} = y_N$$

k, l は互いに素であるから, $l = 1$ であることが分かり $x_N = m$ となる.

したがって, ④ より,

$$m = x_N = x_{N-2} - x_{N-1}y_{N-1}$$

さらに, ③ $\iff x_{N-1} = x_{N-3} - x_{N-2}y_{N-2}$ を代入して,

$$\begin{aligned} m &= x_{N-2} - (x_{N-3} - x_{N-2}y_{N-2})y_{N-1} \\ &= x_{N-3} \cdot (-y_{N-1}) + x_{N-2}(1 + y_{N-2}y_{N-1}) \end{aligned}$$

この操作を②までさかのぼって行くと,

$$\begin{aligned} m &= x_0P(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}) + x_1Q(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}) \\ &= bP(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}) + aQ(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}) \end{aligned}$$

ただし, $P(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}), Q(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1})$ は $y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}$ についての整数係数の多項式であり, これらは整数であるから,

$$t = P(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}), s = Q(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1})$$

とおくと, $m = sa + tb$ と表すことができる.

講評

Ⅰ (小問集合 複素数平面, 場合の数, 媒介変数表示された曲線)

(1) 正 7 角形絡みの問題で授業でも扱っていた典型問題.

(3) 図が書いてあるので, 扱いやすかっただろう.

しっかり得点したいところだ.

Ⅱ (漸化式と極限)

(1) から順に解いていく問題だが, (2) よりも (3) の方が扱いやすい. うまく立ち回って部分点を稼いでほしい.

YMS としては (4) が他の大学別対策でやった問題でありここを取りたかった.

Ⅲ (整数, ユークリッドの互除法)

証明問題も典型問題. 流れを知っていれば完答できるだろう. この問題の出来は合否を分けただろう.

レベルは高いが典型問題も多く, 実力が反映されやすいセットだった. 数学を得意としているならば 70 %を超えてくるだろう. 合格ラインとして, 55 %は確保したい.

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

YMS

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

