医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東海大学医学部　数学

2019年 2月2日実施

$\boxed{1}$

(1)　$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta - \sin\theta}{\theta^3}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2)　複素数 z が $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たすとき，$z^{20} + \dfrac{1}{z^{20}}$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3)　三角形 ABC において，各辺の長さを AB $= 7$，AC $= 5$，BC $= 8$ とする．A から直線 BC に下した垂線と直線 BC の交点を H とする．このとき AH の長さは $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4)　$f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t}{\log t}\,dt\ (x > 1)$ に対して，$f'(\sqrt{e})$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(5)　図 1 は平成 27 年と平成 29 年の 47 都道府県ごとの人口 10 万人あたりの交通事故死者数の散布図である．また図 2 の 5 つの箱ひげ図には，平成 27 年および平成 29 年の 47 都道府県ごとの人口 10 万人あたりの交通事故死者数に対する箱ひげ図が含まれている．図 1 と図 2 から読み取れる，都道府県ごとの 1 年間の人口 10 万人あたりの交通事故死者数についての記述について，正しいものは $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ である．

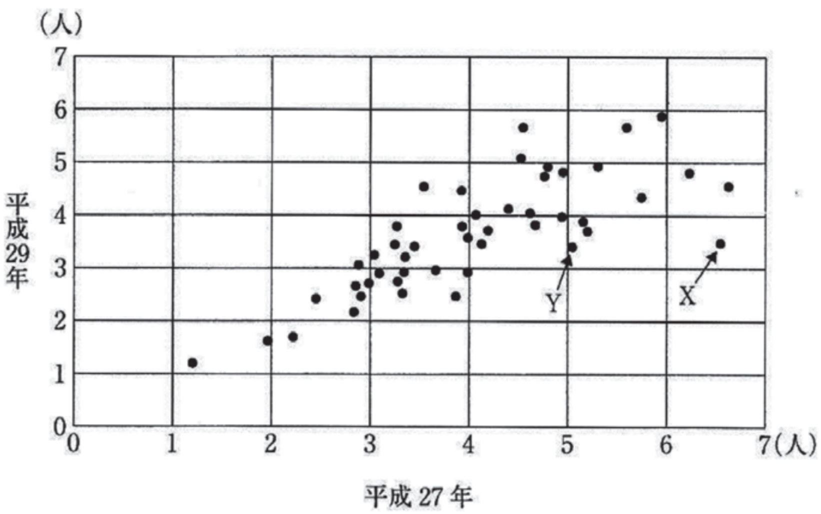


図 1

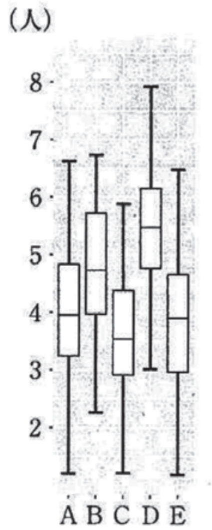


図 2

（出典：「道路の交通に関する統計」（交通局交通企画課）を加工して作成）

a.　人口 10 万人あたりの交通事故死者数の最大値は，平成 27 年の方が平成 29 年より大きい．

b.　散布図の点 Y の平成 27 年の値は，その年の人口 10 万人あたりの交通事故死者数の中央値である．

c.　平成 27 年の箱ひげ図は A である．

d.　平成 29 年の箱ひげ図は E である．

e.　図 1 の点 X がある場合とない場合では，ない場合の方が相関係数の値が大きくなる．

f.　平成 27 年と平成 29 年の人口 10 万人あたりの交通事故死者数には負の相関がある．

解答

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3} &= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\\
&= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta^3}\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\\
&= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta^3}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\\
&= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\\
&= \lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\\
&= 1\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

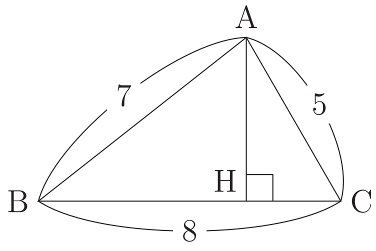
(2) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ より，両辺 z 倍して整理すると $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ である．

これを解いて，$z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$（複号同順）

よって

$$\begin{aligned}
z^{20}+\frac{1}{z^{20}} &= z^{20}+z^{-20}\\
&= \cos\left(\pm\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{10\pi}{3}\right)+\cos\left(\mp\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\mp\frac{10\pi}{3}\right) \quad \text{(複号同順)}\\
&= 2\cos\frac{10}{3}\pi\\
&= 2\cos\frac{4}{3}\pi\\
&= \boldsymbol{-1}.
\end{aligned}$$

(3)



余弦定理より

$$\cos A=\frac{49+25-64}{2\cdot7\cdot5}=\frac{1}{7}$$

よって $\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ である．ゆえに

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\sin A=10\sqrt{3}$$

である．一方

$$8\times\mathrm{AH}\times\frac{1}{2}=10\sqrt{3}$$

であるため，$\mathrm{AH} = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}\sqrt{3}}$.

$\boxed{\text{注釈}}$

$\cos C = \dfrac{25+64-49}{2\cdot 5\cdot 8} = \dfrac{1}{2}$ より $C = 60^\circ$ である．よって $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}\sqrt{3}}$.

(4)　$f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t}{\log t}dt$ において，$g(t) = \dfrac{t}{\log t}$ とし，$g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ とすると

$$f(x) = \Big[G(t)\Big]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$$

である．

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x^2)\cdot 2x - g(x) \\ &= \frac{x^2}{\log x^2}\cdot 2x - \frac{x}{\log x} \\ &= \frac{x^3 - x}{\log x} \end{aligned}$$

より $f'(\sqrt{e}) = \dfrac{e\sqrt{e}-\sqrt{e}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{2(e-1)\sqrt{e}}$.

(5)　b　点 Y の数字は平成 27 年において，9 番目に大きい数字だから，中央値にはならない．

d　平成 29 年の散布図で，最大値は 6 を越えているので箱ひげ図は E ではない．

f　散布図では，正の相関が見られるので正しくない．

$\boxed{2}$

xy 平面において，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_0 とする．

(1)　円 C_0 と $x > 0$ の範囲で外接し，かつ x 軸に接する円の中心の座標を $(p,\ q)$ とする．q を p で表すと $q = \boxed{\quad ア \quad}$ である．

(2)　円 C_1 は中心の x 座標が $a_1 = 1$ であり，$x > 0$ の範囲で C_0 に外接し，かつ x 軸に接する．また円 C_2 は中心の x 座標が a_2 であり，C_0，C_1 の両方に外接し，かつ $x > 0$ の範囲で x 軸に接する．
以下，$n = 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，中心の x 座標が a_n であり，C_0 と C_{n-1} の両方に外接し，かつ x 軸に接する円を C_n とする．ただし，C_n と C_{n-2} は異なる．このとき，C_n の半径を a_n を用いて表すと $\boxed{\quad イ \quad}$ であり，a_n と a_{n+1} との間には

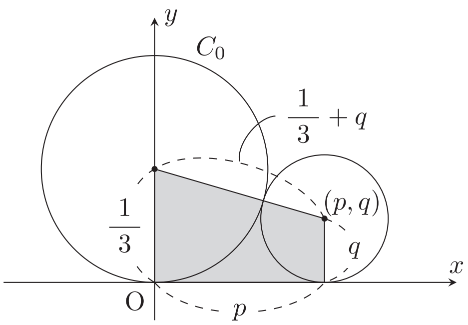
$$(a_n - a_{n+1})^2 = \boxed{\quad ウ \quad}{a_{n+1}}^2{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成立する．したがって，a_{n+1} を a_n を用いて表すと．$a_{n+1} = \boxed{\quad エ \quad}$ である．このようにして定まる数列 $\{a_n\}$ において $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく．このとき b_{n+1} を b_n を用いて表すと $b_{n+1} = \boxed{\quad オ \quad}$ である．したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\quad カ \quad}$ である．

(3)　C_n の面積を S_n とするとき，$S_n = \boxed{\quad キ \quad}$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^4 S_n$ の値は $\boxed{\quad ク \quad}$ である．

解答

(1)



$q > 0$ であり，図の斜線部分の台形に注目して，三平方の定理を考えると

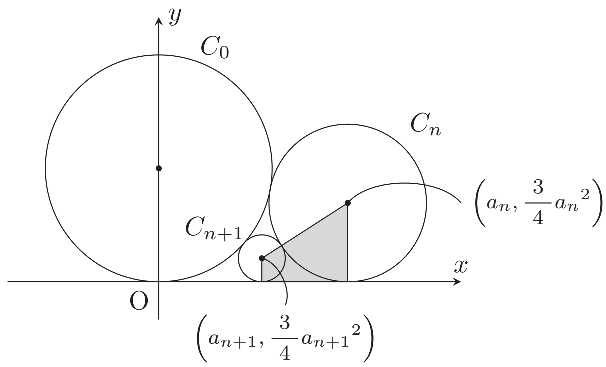
$$\left(q + \frac{1}{3}\right)^2 = p^2 + \left(q - \frac{1}{3}\right)^2$$

展開すると

$$q^2 + \frac{2}{3}q + \frac{1}{9} = p^2 + q^2 - \frac{2}{3}q + \frac{1}{9}$$

整理して $q = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}p^2}$.

(2)



C_n と C_{n+1} の位置関係は上図のようになる．斜線部分の台形に注目して，三平方の定理を考える．

(1) の結果から，C_n の半径は $\boldsymbol{\frac{3}{4}{a_n}^2}$，$C_{n+1}$ の半径は $\frac{3}{4}{a_{n+1}}^2$ であるから，

$$\left(\frac{3}{4}{a_n}^2+\frac{3}{4}{a_{n+1}}^2\right)^2=\left(\frac{3}{4}{a_n}^2-\frac{3}{4}{a_{n+1}}^2\right)^2+(a_n-a_{n+1})^2$$
$$\Longleftrightarrow \frac{9}{8}{a_n}^2{a_{n+1}}^2=-\frac{9}{8}{a_n}^2{a_{n+1}}^2+(a_n-a_{n+1})^2$$
$$\Longleftrightarrow (a_n-a_{n+1})^2=\boldsymbol{\frac{9}{4}}{a_n}^2{a_{n+1}}^2$$

$a_n>a_{n+1}>0$ であるから，$a_n-a_{n+1}=\frac{3}{2}a_na_{n+1}$．よって $a_{n+1}=\boldsymbol{\frac{2a_n}{3a_n+2}}$ である．

逆数を取ると $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}$ となる．$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}=\boldsymbol{b_n+\frac{3}{2}}$．なお，$b_1=\frac{1}{a_1}=1$ である．

数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列なので，$b_n=\frac{3}{2}(n-1)+1=\frac{3n-1}{2}$ である．これより $a_n=\boldsymbol{\frac{2}{3n-1}}$．

(3)　円 C_n の半径は $\frac{3}{4}{a_n}^2$ であるから，

$$S_n=\pi\left(\frac{3}{4}{a_n}^2\right)^2=\frac{9{a_n}^4}{16}\pi=\boldsymbol{\frac{9\pi}{(3n-1)^4}}$$

である．これより

$$\lim_{n\to\infty}n^4S_n=\lim_{n\to\infty}9\pi\left(\frac{n}{3n-1}\right)^4$$
$$=\lim_{n\to\infty}9\pi\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^4$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}}.$$

$\boxed{3}$

2 つの関数

$$f(x) = -|x|(|x|-3), \quad g(x) = a(x+1)$$

を考える．ただし $a > 0$ とする．$y = f(x)$ のグラフを C_1，$y = g(x)$ のグラフを C_2 とする．

(1) C_1 と x 軸との共有点は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個である．

(2) C_2 が a の値によらず必ず通る点の座標は ($\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$) である．

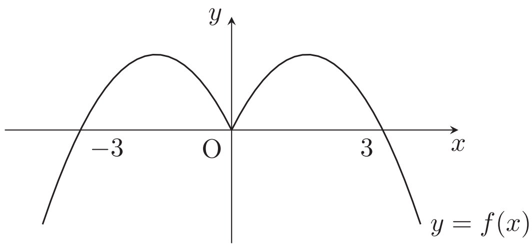
(3) C_1 と C_2 の共有点の個数が 2 個となる a の条件は $\boxed{\text{エ}}$ であり，3 個となる a の条件は $\boxed{\text{オ}}$ であり，4 個となる a の条件は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) C_1 と C_2 が接点をもつとき，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は小さい順に $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ である．さらに，このとき C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-3) & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x(x+3) & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

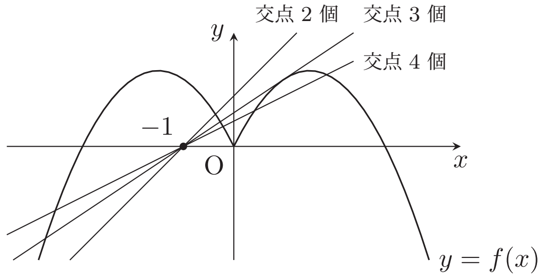
であるから $y = f(x)$ のグラフを描くと，以下のようになる．



(1) グラフより，x 軸との共有点は全部で **3** 個である．

(2) $x = -1$ を $y = a(x+1)$ に代入すると，$y = 0$ となる．よって，a の値によらず $y = a(x+1)$ は必ず $\boldsymbol{(-1,\ 0)}$ を通る．

(3)



図のように，$a > 0$ において，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が接するときが，交点が 3 個になるときであり，そのときの a の値よりも a が大きければ交点 2 個となり，小さければ交点は 4 個となる．

つまり，$x > 0$ において，$y = a(x+1)$ と $y = -x(x-3)$ が接する a の値を求めると，

$$a(x+1) = -x(x-3) \iff x^2 + (a-3)x + a = 0$$

この判別式を D とすると，$D = 0$ から $(a-3)^2 - 4a = 0$ を得る．整理して $(a-1)(a-9) = 0$.

図から，$a = 1$ のときに $x > 0$ で $y = a(x+1)$ と $y = -x(x-3)$ は接する．

これより，

共有点の個数が 2 個になる a の条件は $\boldsymbol{1 < a}$

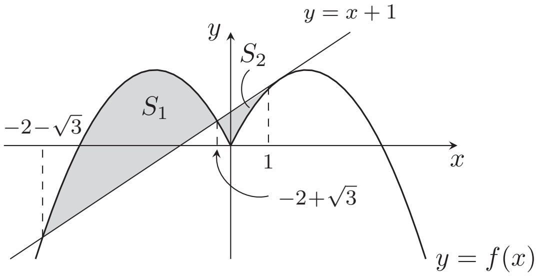
共有点の個数が 2 個になる a の条件は $\boldsymbol{a = 1}$

共有点の個数が 2 個になる a の条件は $\boldsymbol{0 < a < 1}$

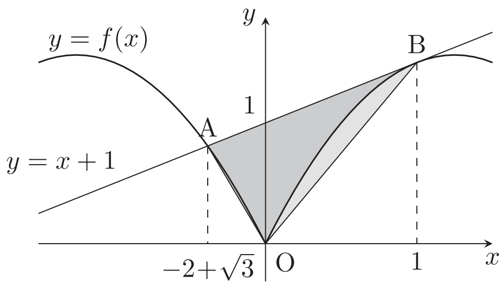
(4)　(3) より，$a = 1$ のときだから，$y = x + 1$ と $y = f(x)$ の交点の x 座標を求めればよい．

- $y = x + 1$ と $y = -x(x - 3)$ との交点（接点）の x 座標は $x = 1$.
- $y = x + 1$ と $y = -x(x + 3)$ との交点の x 座標は $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

よって，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は小さい順に $\boldsymbol{-2 - \sqrt{3}，-2 + \sqrt{3}，1}$



図のように，C_1 と C_2 で囲まれた部分のうち，左側の部分の面積を S_1，右側の面積を S_2 とすると（以下，積分計算では $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる）



$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}} \{-x(x - 3) - (x + 1)\}dx \\
&= \frac{1}{6}\{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})\}^3 \\
&= \frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3 \\
&= 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{A}(-2 + \sqrt{3},\ f(-2 + \sqrt{3}))$，$\mathrm{B}(1,\ f(1))$ とすると

$$\begin{aligned}
S_2 &= (\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}) - \frac{1}{6}\{0 - (-2 + \sqrt{3})\}^3 - \frac{1}{6}(1 - 0)^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - \sqrt{3}) - \frac{(2 - \sqrt{3})^3}{6} - \frac{1}{6} \\
&= 2\sqrt{3} - 3.
\end{aligned}$$

よって，$S_1 + S_2 = \boldsymbol{6\sqrt{3} - 3}$.

講評

$\boxed{1}$（小問集合）
どの問題も落とせない問題である．

$\boxed{2}$（図形と漸化式）
立式を落ちついてできれば，後は漸化式を解くだけの簡単な問題であり，満点を取りたい．

$\boxed{3}$（二次関数と積分）
グラフを描くだけの平易な問題．(4) の面積計算がやや難しいが，確実に正解したい．

全体的に，昨年の 1 日目と比較すると，大幅に易化した．東海の入試倍率を考えると，1 次合格には数学は高得点が必要だと考えられる．ボーダーラインは 85 %と予想される．