

東北医科薬科大学 数学

2019年 2月1日実施

[I]

xyz 空間内に点 $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(1, -1, 0)$ がある. このとき, 次の間に答えよ.

(1) 三角形 ABC の面積は $\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である.

(2) 原点を $O(0, 0, 0)$ とおく. 点 O , C を通る直線を l とし, 直線 l 上の点 D の x 座標を t とおく. また, 点 E は, 点 A , B を通る直線上を動くとする.

このとき, DE^2 の最小値は $f(t) = \frac{\boxed{\text{ウエ}}t^2 + \boxed{\text{オカ}}t + \boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である.

さらに, t が全ての実数を動くとき, $f(t)$ は $t = \frac{\boxed{\text{サン}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ のとき最小値 $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}$ をとる.

解答

$$(1) \vec{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CA}|^2 |\vec{CB}|^2 - (\vec{CA} \cdot \vec{CB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 12 - 4^2} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

(2) $\vec{OD} = t\vec{OC}$, $\vec{OE} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB}$ と表せるから,

$$D(t, -t, 0), E(2-3s, 1, 1+s)$$

したがって,

$$\begin{aligned} DE^2 &= (2-3s-t)^2 + (1+t)^2 + (1+s)^2 \\ &= 10s^2 + (6t-10)s + 2t^2 - 2t + 6 \\ &= 10 \left(s + \frac{3t-5}{10} \right)^2 + \frac{11t^2 + 10t + 35}{10} \end{aligned}$$

s は全ての実数を動くことができるから, DE^2 の最小値 $f(t)$ は,

$$f(t) = \frac{11t^2 + 10t + 35}{10}$$

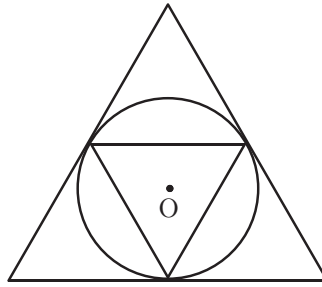
さらに, t が全ての実数を動くとき,

$$f(t) = \frac{1}{10} \left(t + \frac{5}{11} \right)^2 + \frac{36}{11}$$

であるから, $f(t)$ は $t = -\frac{5}{11}$ のとき最小値 $\frac{36}{11}$ をとる.

[II]

中心 O, 半径 1 の円に, 2 つの正三角形がそれぞれ, 外接, 内接し, 外接正三角形を図のように 7 つの領域に分けている.



1 つの領域には同じ色を塗り, 境界線を共有する 2 つの領域には互いに異なる色を塗ることによって, この 7 つの領域を塗り分ける. ただし, 点 O を中心に $\pm 120^\circ$ 回転, または, この図を裏返 (点 O と外接三角形の頂点を結ぶ直線に関し反転) して互いに重なる塗り分けは同じと見なす. このとき, 次の問に答えよ.

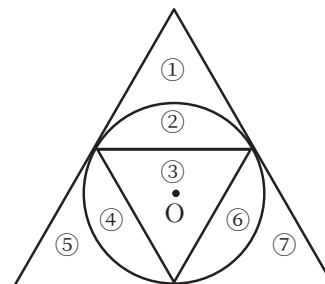
- (1) 赤色と青色の 2 色で塗り分ける方法は 通りである.
- (2) 赤色, 青色, 緑色のうち 2 色を用いて塗り分ける方法は 通りである.
- (3) 赤色, 青色, 緑色の 3 色を全て用いて塗り分ける方法は 通りある.
- (4) (3) の塗り分けのうち, 赤色領域の面積の総和が最大となるように塗り分ける方法は 通りである. ま

た, その総和の最大値は $\frac{\text{カキ} \sqrt{\text{ク}} - \text{ケ} \pi}{\text{コ}}$ である.

解答

7 つの領域を右の図のように①～⑦とおく.

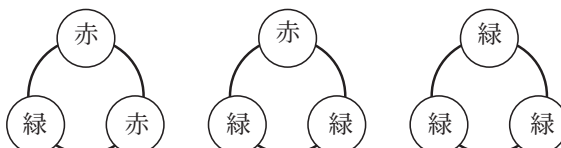
- (1) 2 色を用いて塗り分けるとき,
 (①, ③, ⑤, ⑦) と (②, ④, ⑥) に
 それぞれ 赤色または青色を塗ればよいので **2 通り**
- (2) 赤色, 青色, 緑色のうち, 用いる 2 色の選び方は
 ${}_3C_2 = 3$ 通り
 その塗り分け方は, (1) と同様に 2 通りあり,
 $3 \times 2 = \mathbf{6}$ 通り



- (3) まず ③に赤色を塗るときを考える. (②, ④, ⑥) に青色または緑色を塗り分ける方法を場合分けする.

(ア) (②, ④, ⑥) の全てに青色を塗るとき

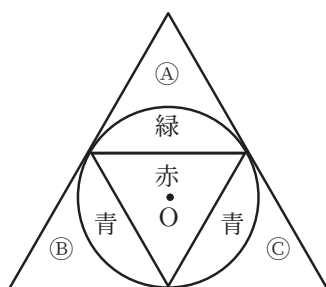
(①, ⑤, ⑦) に赤色または緑色を塗る方法は, 点 O を中心に $\pm 120^\circ$ 回転, または, この図を裏返して互いに重なる塗り分けを同じ場合とみなす. 3 色を全て用いるので,



の 3 通りである.

- (イ) (②, ④, ⑥) のうち 2 つの領域に青色を塗り, 残り 1 つの領域に緑色を塗るとき

回転, 裏返して同じとなる場合を除くので, 以下の図のように固定して考えることができる.



A には、赤色または青色を塗る：2 通り

(B, C) には、赤色または緑色を塗る。このとき、裏返して同じ場合を除くので、

(赤, 赤), (赤, 緑), (緑, 緑)

の 3 通り。

したがって、 $2 \times 3 = 6$ 通り。

(ウ) (②, ④, ⑥) のうち 2 つの領域に緑色を塗り、残り 1 つの領域に青色を塗るとき

(イ) の場合と同様に考えて 6 通り。

(エ) (②, ④, ⑥) の全てに緑色を塗るとき

(ア) の場合と同様に考えて 3 通り。

したがって、 $3 + 6 + 6 + 3 = 18$ 通り。

③に青色、緑色を塗る場合も同じように考えればよいので、

$18 \times 3 = 54$ 通り

(4) 領域 ①, ②, $\dots$, ⑦ の面積をそれぞれ $S_1, S_2, \dots, S_7$ とおく。

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = S_4 = S_6 = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1 = S_5 = S_7 = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3})^2 - \pi \right\} \times \frac{1}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

赤色領域の面積の総和が最大となるのは、(①, ③, ⑤, ⑦) を塗る場合、または (②, ④, ⑥) を塗る場合のいずれかである。

$$S_1 + S_3 + S_5 + S_7 = \frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4}$$

$$S_2 + S_4 + S_6 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ここで、この 2 つの値の大小を比較する。

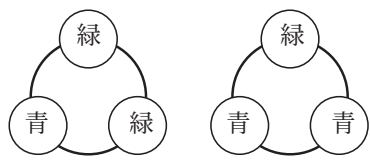
$$\frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4} - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3} - 4\pi}{2} = \frac{\sqrt{243} - \sqrt{16\pi^2}}{2} > 0$$

であるから、求める最大値は $\frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4}$

注釈

2 数のうち、解答欄に適するのは $\frac{15\sqrt{3} - 4\pi}{4}$ のみである。

またこのとき、(①, ③, ⑤, ⑦) に赤色を塗り、(②, ④, ⑥) に青色と緑色を塗り分ける方法は、必ず両方の色を用いなければならないので、



の 2 通りである.

[III]

楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ①と直線 $y = p$ ($2 < p$) ②を考える. 直線②上の点 $Q(t, p)$ ($0 \leq t$) から楕円①の 2 つの接線 l_1, l_2 をひき, それぞれの接点を $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) とおく. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $t = 3$ のとき, 接点 $Q_2(x_2, y_2)$ の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である. また, 接線 l_1 の傾きは $\frac{p^2 - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}p}$

であり, また $x_1 = \frac{\boxed{\text{オカ}} - \boxed{\text{キ}}p^2}{\boxed{\text{ク}} + p^2}$ である.

(2) $t = 3, p = 2\sqrt{3}$ とする. このとき, $x_1 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である. また, この楕円の内部の点 (x, y) で $x_1 \leq x$,

$0 \leq y$ にある部分の面積は $\frac{\boxed{\text{シ}}\pi + \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である.

(3) $t \neq 3$ とする. 2 つの接線 l_1, l_2 が直交するとき $p^2 + t^2 = \boxed{\text{タチ}}$ である. また, 直交しないとき, 2 つの接

線 l_1, l_2 がなす角 $\angle Q_1QQ_2$ を θ とおくと $|\tan \theta| = \frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}p^2 + \boxed{\text{ト}}t^2 - \boxed{\text{ナニ}}}}{|p^2 + t^2 - \boxed{\text{ヌネ}}|}$ である.

解答

接線 l_1 の傾きを m とすると, l_1 の方程式は,

$$y = m(x - t) + p \iff y = mx + n \quad (\text{ただし, } n = p - mt) \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

これが楕円①と接するための条件を求めておく.

③を①に代入して,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(mx + n)^2}{4} = 1 \iff (9m^2 + 4)x^2 + 18mnx + (9n^2 - 36) = 0 \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

判別式を D として,

$$\frac{D}{4} = (9mn)^2 - (9m^2 + 4)(9n^2 - 36) = 36(9m^2 - n^2 + 4)$$

①, ③が接するとき $D = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} 9m^2 - n^2 + 4 = 0 &\iff 9m^2 - (p - mt)^2 + 4 = 0 \\ &\iff (t^2 - 9)m^2 - 2ptm + (p^2 - 4) = 0 \dots\dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

(1) $t = 3$ のとき, 接点 Q_2 の座標は $(\mathbf{3}, \mathbf{0})$ である.

また, ⑤ $\iff -6pm + (p^2 - 4) = 0$ より, 接線 l_1 の傾きは,

$$m = \frac{p^2 - 4}{6p} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

このとき, ④の重解が x_1 となるから,

$$x_1 = -\frac{9mn}{9m^2 + 4} = -\frac{9m(p - 3m)}{9m^2 + 4} = \frac{\mathbf{12} - \mathbf{3p^2}}{\mathbf{4} + \mathbf{p^2}} \quad (\textcircled{6} \text{を代入して計算})$$

(2) (1) の結果を用いて, $p = 2\sqrt{3}$ のとき $x_1 = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}$

楕円①の $0 \leq y$ の部分は, $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ と表せる.

したがって、求める面積を S とすると、

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^3 \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} dx$$

$x = 3 \sin u$ と置換して、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3 |\cos u| \cdot 3 \cos u du \\ &= 6 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \\ &= 3 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du \\ &= 3 \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

(3) $t \neq 3$ のとき、2つの接線 l_1, l_2 の傾きは方程式⑤の2解である.

この2解を m_1, m_2 とすると、

$$m_1 + m_2 = \frac{2pt}{t^2 - 9}, \quad m_1 m_2 = \frac{p^2 - 4}{t^2 - 9}$$

l_1, l_2 が直交するとき、 $m_1 m_2 = -1$ であるから、

$$\frac{p^2 - 4}{t^2 - 9} = -1 \iff p^2 + t^2 = 13$$

直交しないとき、 $|\tan \theta| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ であるから、

$$\begin{aligned} |\tan \theta| &= \frac{\sqrt{(m_1 - m_2)^2}}{|1 + m_1 m_2|} \\ &= \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{|1 + m_1 m_2|} \\ &= \frac{2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|p^2 + t^2 - 13|} \end{aligned}$$

別解

補助円を利用すると、以下のように解ける.

楕円 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 直線 $l: y = p$ とし、これらを y 軸方向に $\frac{3}{2}$ 倍した図形を円 C' , 直線 l' とおく. 以下、点は図に描かれているように設定する.

$$C': x^2 + y^2 = 9, \quad l': y = \frac{3}{2}p$$

このとき、fig.1, fig.2 のようになる.

fig.1

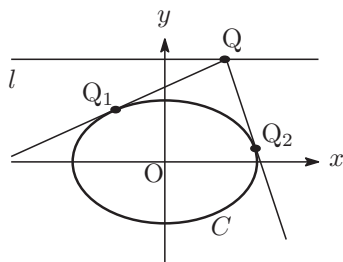
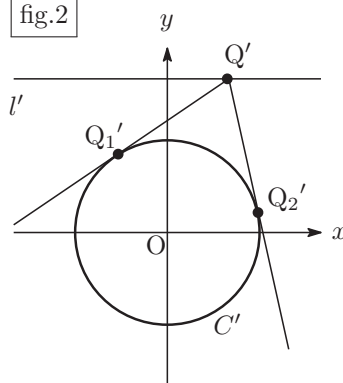


fig.2



- (1) $t = 3$ のとき, 点 Q_2 における接線は y 軸と平行であり, Q_2 の座標は $(3, 0)$. このとき, fig.3 のようになるので, $\angle OQ'Q_2' = \alpha$ とおくと,

$$\tan \alpha = \frac{OQ_2'}{Q'Q_2'} = \frac{3}{\frac{3}{2}p} = \frac{2}{p}$$

であるから,

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4p}{p^2 - 4}$$

直線 l_1' と x 軸とのなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ であり,

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \frac{p^2 - 4}{4p}$$

したがって, 直線 l_1 の傾きは

$$\frac{p^2 - 4}{4p} \times \frac{2}{3} = \frac{p^2 - 4}{6p}$$

また, fig.3 において, $\angle Q_1'OH' = 2\alpha$ であるから,

$$OH' = OQ_1' \cdot \cos 2\alpha = 3 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = 3 \cdot \left(\frac{2}{1 + \tan^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{3p^2 - 12}{4 + p^2}$$

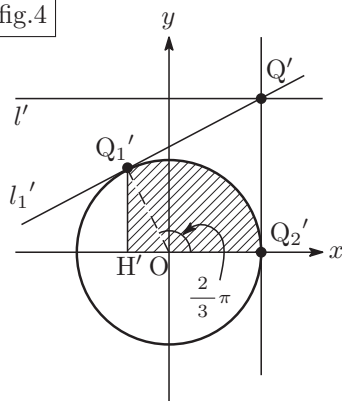
$$\text{となり, } x_1 = -OH' = \frac{12 - 3p^2}{4 + p^2}$$

- (2) $t = 3, p = 2\sqrt{3}$ のとき,

$$x_1 = \frac{12 - 3 \cdot (2\sqrt{3})^2}{4 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{-3}{2}$$

したがって, 円 C' の内部の (x, y) で $x_1 \leq x, 0 \leq y$ にある部分の面積は, fig.4 の斜線部を考えればよく,

fig.4



$$\frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

この面積を $\frac{2}{3}$ 倍することにより, $\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4}$

(3) $t \neq 3$ のとき, 接線の方程式を $y = mx + n$ とおく. これが楕円 C と接するときを考えればよい.

これらを y 軸方向に $\frac{3}{2}$ 倍するとき,

$$\text{円 } C' \text{ に直線 } \frac{2}{3}y = mx + n \iff mx - \frac{2}{3}y + n = 0 \text{ が接する}$$

条件を考えればよい. 円 C' の中心と直線との距離を d とおけば

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + \frac{4}{9}}}$$

これが円 C' の半径と一致するので,

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + \frac{4}{9}}} = 3 \iff |n| = \sqrt{9m^2 + 4} \iff n^2 = 9m^2 + 4 \dots\dots\dots ⑦$$

ここで, 直線 $y = mx + n$ が点 (t, p) を通るので,

$$p = mt + n \iff n = p - mt$$

であり, これを⑦に代入すると

$$(p - mt)^2 = 9m^2 + 4 \iff (t^2 - 9)m^2 - 2ptm + p^2 - 4 = 0 \dots\dots\dots ⑧$$

方程式⑧の解が求める直線の傾き m_1, m_2 である. l_1, l_2 が直交するとき, 解と係数の関係から,

$$m_1 \times m_2 = \frac{p^2 - 4}{t^2 - 9} = -1 \iff p^2 + t^2 = 13$$

さらに, ⑧の 2 解は

$$m = \frac{pt \pm \sqrt{p^2t^2 - (t^2 - 9)(p^2 - 4)}}{t^2 - 9}$$

であるから, 2 つの接線のなす角 θ について,

$$|\tan \theta| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right| = \frac{2\sqrt{9p^2 + 4t^2 - 36}}{|p^2 + t^2 - 13|}$$

講評

[I] は完答すべき問題である.

[III] は楕円の典型問題なので, しっかりと加点してほしいが, テクニカルに解かなければ計算は煩雑になる.

[II](2) 以降は点差が分かれたと思われる.

大問の途中でつまづいても, その後の問題で加点できるものもあったので最後まで問題に食らいつく姿勢で差が出る問題であった.

全体で 70% 取ってほしい.

本解答速報の内容に関するお問合せは

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

