Ⅳ $\boxed{ク}$ を以下の通り訂正いたします。

示すべき問題は以下のようになります.

> $f(x)$ を実数全体で定義された，恒等的に 0 でない，微分可能な関数とするとき
>
> $f(f(x))+f(x)=0$　ならば　$f(x)=-x$
>
> **(注)**　実際の問題文では「$f(x)$ を恒等的に 0 でない微分可能な連続関数」としているが，微分可能ならば連続である.
>
> **(注)**　また，問題文の「正の実数」は (a) でのみ考える条件と解釈した．そうでないと，証明の過程で問題自体に矛盾が生じる.

[証明]

$$f(f(x))+f(x)=0 \quad \cdots(\spadesuit)$$

とおく．(b) の $\boxed{\text{キ}}$ より $(\spadesuit)$ を満たす関数が定数関数であるとすると，

$$f(x)\equiv 0 \text{ (恒等的)}$$

となり題意に反する．したがって $f(x)$ は定数関数ではないため，0 以外のある値 k (実数) をとり得る．すなわちある実数 a が存在して

$$f(a)=k\cdots①$$

とできる．$x=a$ を $(\spadesuit)$ に代入して

$$f(f(a))+f(a)=0$$
$$\therefore f(k)=-k\cdots②$$

が成立するから，f が連続であること ($-k$ と k の間の値は中間値の定理により，とり得ることに注意して)，および $(\spadesuit)$ から定義域を実数全体としたときの $f(x)$ の値域を $Range(f)$ と書くことにすれば ($(\spadesuit)$ は f の中に $f(x)$ が入っているので，)

$$f(x)=-x \quad (x\in Range(f)) \quad \cdots③$$

であり，①，② および $f(x)$ の連続性から，ある正の実数 c を用いて

$$Range(f)=[-c,c] \text{ または } (-c,c)\cdots④$$

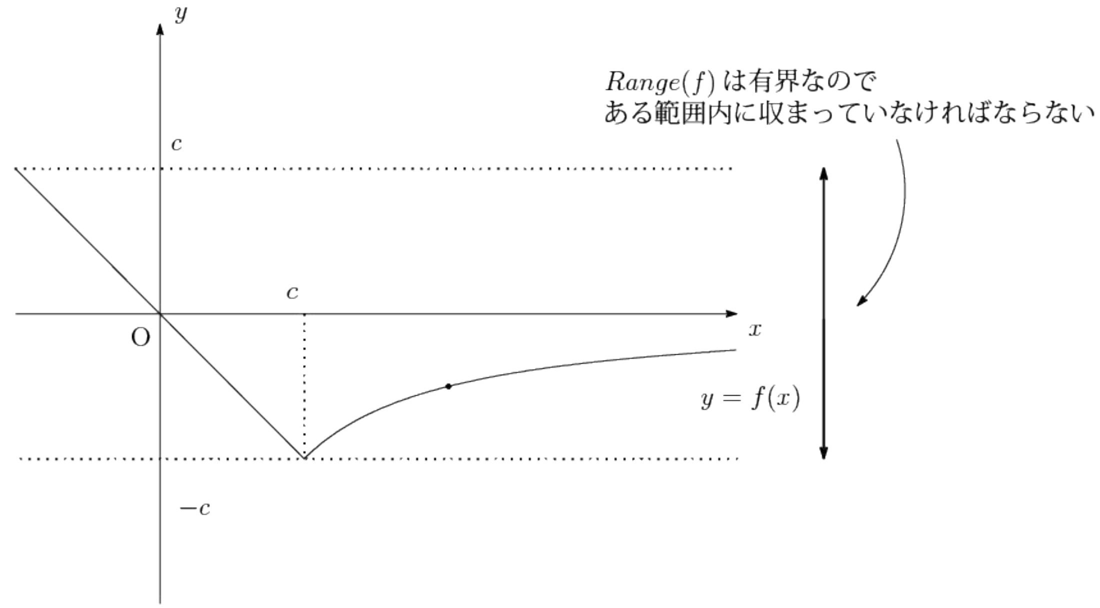
という形をしていることがわかる.
(※ $[-c,c]$ は $-c\leqq f(x)\leqq c$，$(-c,c)$ は $-c<f(x)<c$ の意味で考えて構わない)

> **(注)**　したがって，$k(\neq 0)$，$-k$ は特に $f(x)$ がとり得る値なので，$x>0$ の範囲でのみ考えると $(\spadesuit)$ の $f(f(x))$ が定義されないため，問題が生じる.

あとはこの f の値域：$Range(f)$ が実数全体であることが示されればよい.
以下，これを背理法により示す．f の値域：$Range(f)$ が有界である (ある範囲に収まっている) とすると ④ より

$$Range(f)=[-c,c] \text{ または } (-c,c)$$

の形である．したがって，$y=f(x)$ のグラフは例えば以下のようになっていなければならない.



特に $x=c$ での微分係数を考えると，左側微分係数は

$$\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=-1$$

右側微分係数は (存在すればの話．存在しなければ矛盾)

$$\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

で与えられるが，

$$f(x)-f(c)\geqq 0,\text{ および, } x-c>0$$

であるから

$$\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqq 0$$

となり，$x=c$ で微分不可能であることがわかるため，f が実数全体で微分可能であることに矛盾する.
したがって，$Range(f)$ は有界とならず，ある範囲に収まることはないため，$Range(f)$ は実数全体でなければならない．よって，③ とあわせ，実数全体で

$$f(x)=-x$$

であることが示された.