

日本医科大学(前期) 数学

2019年1月28日実施

1

a を $a \neq 0, -1$ を満たす実数とする。O を原点とする xy 平面上において次の2つの曲線を考える：

$$C_1 : x^2 - y^2 = 1, \quad C_2 : y = ax^2 - \frac{3}{2a+2}$$

以下の各問の答えのみを解答欄に記入せよ。

問1 $a = 1$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めよ。

問2 C_1 と C_2 が相異なる4点で交わるための a に対する必要十分条件を求めよ。

問3 C_1 と C_2 が相異なる4点で交わる時、それら4点すべてを通る円の中心の座標を a を用いて表せ。また、その円の半径を r とするとき、以下の空欄に適する1以上の整数を解答欄に記入せよ。

$$r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イ}}}{a \boxed{\text{ウ}} (a + \boxed{\text{エ}})}}$$

解答

$$C_1 : x^2 - y^2 = 1 \quad \cdots \text{①} \quad C_2 : y = ax^2 - \frac{3}{2a+2} \quad \cdots \text{②}$$

問1 $a = 1$ のとき、②は

$$y = x^2 - \frac{3}{4} \iff x^2 = y + \frac{3}{4} \quad \cdots \text{③}$$

である。①、③の共有点の座標は、

$$\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - y^2 = 1 \iff (2y - 1)^2 = 0 \iff y = \frac{1}{2}$$

これを①に代入して

$$x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \iff x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

したがって、共有点の座標は $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

問2 $a \neq 0, -1$ に注意して

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = ax^2 - \frac{3}{2a+2} \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ a(x^2 - y^2) + y = a \cdot 1 + \left(ax^2 - \frac{1}{2a+2}\right) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = y^2 + 1 & \dots \textcircled{4} \\ 2a(a+1)y^2 - 2(a+1)y + 2a^2 + 2a - 3 = 0 & \dots \textcircled{5} \end{cases} \end{aligned}$$

⑤ が異なる 2 つの実数解をもつとき、④ より、連立方程式は相異なる 4 つの実数解 (x, y) をもつので、 C_1, C_2 は相異なる 4 点で交わる。⑤ の判別式を D として、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+1)^2 - 2a(a+1)(2a^2 + 2a - 3) > 0 \\ \iff (a+1)\{(a+1) - 2a(2a^2 + 2a - 2)\} &> 0 \\ \iff (a+1)(-4a^3 - 4a^2 + 7a + 1) &> 0 \\ \iff (a+1)(a-1)(4a^2 + 8a + 1) &< 0 \\ \iff (a+1)(a-1)\left(a - \frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(a - \frac{-2-\sqrt{3}}{2}\right) &< 0 \end{aligned}$$

したがって、 $a \neq 0, 1$ と合わせて

$$\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < a < -1, \quad \frac{-2+\sqrt{3}}{2} < a < 0, \quad 0 < a < 1$$

となる。

問3 C_1, C_2 の全ての共有点を通る図形を実数 k を用いて

$$(x^2 - y^2 - 1) + k\left(ax^2 - y - \frac{3}{2a+2}\right) = 0$$

と表すことができる。⑥ は $k = -\frac{2}{a}$ のとき x^2, y^2 の係数が一致するので円を表す。4 つの共有点を通る円はただ 1 つ存在するので、これが求める円の方程式となる。したがって

$$\begin{aligned} &(x^2 - y^2 - 1) - \frac{2}{a}\left(ax^2 - y - \frac{3}{2a+2}\right) \\ \iff -x^2 - y^2 + \frac{2}{a}y - 1 + \frac{3}{a(a+1)} &= 0 \\ \iff x^2 + y^2 - \frac{2}{a}y + \frac{a^2 + a - 3}{a(a+1)} &= 0 \\ \iff x^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{-a^3 - a^2 + 4a + 1}{a^2(a+1)} \end{aligned}$$

よって、中心 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 、半径 $r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + 4a + 1}{a^2(a+1)}}$ の円である。

II

空間において 1 点 O をとり、相異なる 4 点 P, A, B, C を頂点とする四面体 $PABC$ について考える。四面体 $PABC$ は点 O を中心とする半径が 1 の球に内接しており、三角形 ABC は 1 辺の長さが l の正三角形であると仮定する。

問 1 l の取り得る値の範囲を答えよ。答えのみでよい。

問 2 $s = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$, $t = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$ とおき、点 P から三角形 ABC を含む平面に垂線 PH を下ろす。このとき、 $\overrightarrow{AH}$ を l, s, t を用いて $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の 1 次結合で表せ。

問 3 問 2 において l を固定し、点 P が $2s - t = l^2$ を満たしながら点 O を中心とする半径 1 の球面上を動くとき、四面体 $PABC$ の体積の最大値 $V(l)$ を求めよ。

解答

問 1 球面を 3 点 A, B, C を含む平面で切るとき、その断面は、半径が 1 以下の円である。

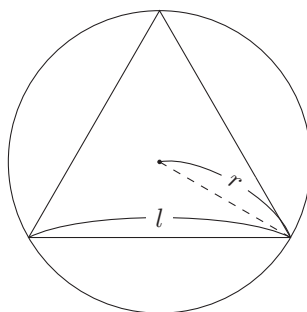


図 1

この断面の半径を r とおくとき、 $0 < r \leq 1$ であるから、正弦定理より、

$$\frac{l}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2r \iff l = \sqrt{3}r$$

である。したがって、 $0 < l \leq \sqrt{3}$ 。

問 2 点 H が平面 ABC 上にあるとき、実数 m, n を用いて

$$\overrightarrow{AH} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP} \\ &= m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

ここで、 $PH \perp (\text{平面 } ABC)$ なので、 $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ を満たせばよい。

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = (m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\iff m|\overrightarrow{AB}|^2 + n\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\iff m \cdot l^2 + n \cdot \frac{l^2}{2} - s = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} = (m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\iff m\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + n|\overrightarrow{AC}|^2 - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\iff m \cdot \frac{l^2}{2} + n \cdot l^2 - t = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $m = \frac{4s-2t}{3l^2}$, $n = \frac{4t-2s}{3l^2}$ であり,

$$\overrightarrow{AH} = \frac{4s-2t}{3l^2} \overrightarrow{AB} + \frac{4t-2s}{3l^2} \overrightarrow{AC}$$

問3 AB を 2:1 に内分する点を D とおく. 三角形 ABC の重心を G とおく.

$2s-t=l^2$ のとき, 問2の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \frac{2l^2}{3l^2} \overrightarrow{AB} + \frac{4t-(l^2+t)}{3l^2} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \left(\frac{t}{l^2} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

t が変化するとき, 点 H は点 D を通り, 辺 AC に平行な直線 L 上に存在する. 四面体 PABC の体積が最大となるのは, PH の長さ (三角形 ABC を底面と見たときの高さ) が最大となるときである. これは, 図2のように直線 BG と直線 L との交点に点 H があるときである.

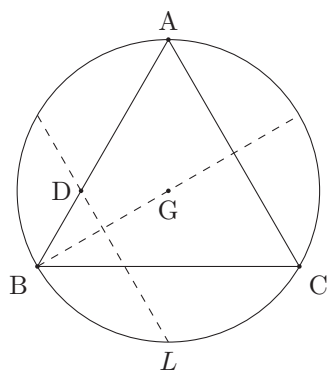


図2

このとき, 3点 P, B, G を含む平面を切り出すと図4のようになる.

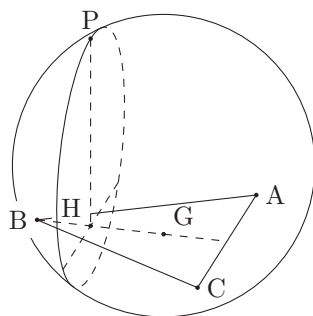


図3

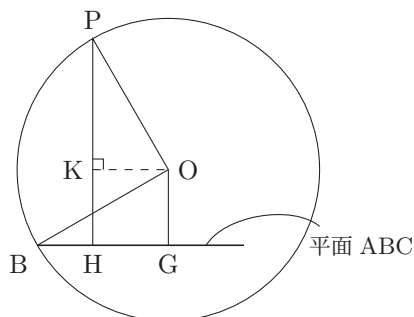


図4

このとき, $BG = \frac{l}{\sqrt{3}}$, $GH = \frac{\sqrt{3}}{6}l$ であるから,

$$OG = \sqrt{1^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2}, \quad PK = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}l \right)^2}$$

であり、体積の最大値 $V(l)$ は

$$\begin{aligned} V(l) &= \frac{1}{3} \cdot (\triangle ABC \text{ の体積}) \times PH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{3}} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{12}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} l^2 \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{3}} + \sqrt{1 - \frac{l^2}{12}} \right) \end{aligned}$$

III

$f(x) = \log(1+x^2)$ ($x > 0$) とする. また, 実数 a, h は

$$0 < a < 1, 0 < h < 1, 0 < a+h < 1$$

を満たすとする. 以下の各問いに答えよ.

問1 k を正の実数とする. このとき, 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{1}{k+1} \cdot \frac{x^2}{2} \quad (0 \leq x \leq k)$$

問2 各 a, h に対して, 以下の等式を満たす c ($a < c < a+h$) がただ1つ存在することを示せ.

$$f(a+h) = f(a) + f'(c)h$$

また, d を以下のように定めたとき, c を d を用いて表せ.

$$d = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

問3 問2において a を固定し, c を h の関数と考えて $c(h)$ と書くことにする. また, $\theta(h)$ を以下のように定める.

$$\theta(h) = \frac{c(h) - a}{h}$$

このとき, 極限 $\lim_{h \rightarrow 0+0} \theta(h)$ を求めよ. ただし, 記号 $\lim_{h \rightarrow 0+0}$ は $h > 0$ の範囲で h を 0 に限りなく近づけたときの極限を意味する.

解答

問1 $F(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ ($x \geq 0$) とおく.

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

よって, $F(x)$ は単調増加であるから $F(x) \geq F(0) = 0$.

すなわち, $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x)$ が成り立つ.

さらに, $G(x) = \left(x - \frac{1}{k+1} \cdot \frac{x^2}{2}\right) - \log(1+x)$ ($x \geq 0$) とおく.

$$\begin{aligned} G'(x) &= 1 - \frac{x}{k+1} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} - \frac{x}{k+1} \\ &= x \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

である. ここで, $0 \leq x \leq k$ において, $\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{k+1}$ であるから $G'(x) \geq 0$ である.

よって, $G(x)$ は単調増加であるから, $G(x) \geq G(0) = 0$ である.

すなわち $\log(1+x) \leq x - \frac{1}{k+1} \cdot \frac{x^2}{2}$ が成り立つ. (証明終了)

問2 $f(x) = \log(1+x^2)$ は全ての実数 x に関して連続かつ微分可能である.

区間 $a \leq x \leq a+h$ において平均値の定理より,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = f'(c) \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす実数 c ($a < c < a+h$) が少なくとも1つ存在する.

さらに, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ であり, $0 < a$, $a+h < 1$ のもとで考えれば, $a < x < a+h$ において $f''(x) > 0$ である. すなわち関数 $f'(x)$ は単調増加である. したがって, $\textcircled{1}$ を満たす実数 c は1つしか存在しない.

$$\textcircled{1} \iff f(a+h) - f(a) = f'(c) \cdot h$$

$$\iff f(a+h) = f(a) + f'(c) \cdot h$$

であり, これを満たす c ($a < c < a+h$) はただ1つ存在する. (証明終了)

$d = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ とおくと, $\textcircled{1}$ より $d = f'(c)$ であるから,

$$\begin{aligned} d = \frac{2c}{1+c^2} &\iff dc^2 - 2c + d = 0 \\ &\iff c = \frac{1 \pm \sqrt{1-d^2}}{d} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで, c は $0 < c < 1$ を満たす実数であり, 相加平均と相乗平均の関係から

$$d = \frac{2}{c + \frac{1}{c}} \leq \frac{2}{2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}}} = 1$$

となるが, $c \neq 1$ であるから等号が成り立たず $0 < d < 1$ であることがわかる. $\textcircled{2}$ の解のうち $\frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d}$ は d について単調減少であり, $0 < d < 1$ から

$$\frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d} > \frac{1 + \sqrt{1-1^2}}{1} = 1$$

となり, $0 < c < 1$ を満たさない. したがって, $d = f'(c)$ を満たす c を d を用いて表すと, $c = \frac{1 - \sqrt{1-d^2}}{d}$ である.

問 3

$$\begin{aligned}
 \theta(h) &= \frac{c(h) - a}{h} \\
 &= \frac{1}{h} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - d^2}}{d} - a \right) \\
 &= \frac{1 - ad - \sqrt{1 - d^2}}{hd} \\
 &= \frac{(1 - ad)^2 - (1 - d^2)}{hd} \cdot \frac{1}{1 - ad + \sqrt{1 - d^2}} \\
 &= \frac{(1 + a^2)d - 2a}{h} \cdot \frac{1}{1 - ad + \sqrt{1 - d^2}} \\
 &= (1 + a^2) \cdot \frac{d - \frac{2a}{1 + a^2}}{h} \cdot \frac{1}{1 - ad + \sqrt{1 - d^2}} \\
 &= (1 + a^2) \cdot \frac{d - f'(a)}{h} \cdot \frac{1}{1 - ad + \sqrt{1 - d^2}}.
 \end{aligned}$$

以下、次の2つの極限を求める.

$$A = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{d - f'(a)}{h}, \quad B = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 - ad + \sqrt{1 - d^2}}$$

$a < c(h) < a + h$ より, はさみうちの原理から $\lim_{h \rightarrow 0+0} c(h) = a$ であり, $d = f'(c) = \frac{2c}{1 + c^2}$ は連続関数であるから, $\lim_{h \rightarrow 0+0} d = f'(a) = \frac{2a}{1 + a^2}$ である.

したがって,

$$B = \frac{1}{1 - af'(a) + \sqrt{1 - \{f'(a)\}^2}} = \frac{1 + a^2}{2(1 - a^2)}$$

次に A について,

$$\begin{aligned}
 \frac{d - f'(a)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \right\} \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[\log\{1 + (a + h)^2\} - \log(1 + a^2) - \frac{2ah}{1 + a^2} \right] \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[\log\left\{1 + \frac{(2a + h)h}{1 + a^2}\right\} - \frac{2ah}{1 + a^2} \right]
 \end{aligned}$$

更に, 問 1 で示した不等式で $x = k = \frac{(2a + h)h}{1 + a^2}$ として,

$$\begin{aligned}
 \frac{(2a + h)h}{1 + a^2} - \frac{(2a + h)^2 h^2}{2(1 + a^2)^2} &\leq \log\left\{1 + \frac{(2a + h)h}{1 + a^2}\right\} \leq \frac{(2a + h)h}{1 + a^2} - \frac{(2a + h)^2 h^2}{2(k + 1)(1 + a^2)^2} \\
 \frac{h^2}{1 + a^2} - \frac{(2a + h)^2 h^2}{2(1 + a^2)^2} &\leq \log\left\{1 + \frac{(2a + h)h}{1 + a^2}\right\} - \frac{2ah}{1 + a^2} \leq \frac{h^2}{1 + a^2} - \frac{(2a + h)^2 h^2}{2(k + 1)(1 + a^2)^2} \\
 \frac{1}{1 + a^2} - \frac{(2a + h)^2}{2(1 + a^2)^2} &\leq \frac{d - f'(a)}{h} \leq \frac{1}{1 + a^2} - \frac{(2a + h)^2}{2(k + 1)(1 + a^2)^2}
 \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0 + 0$ のとき, $k \rightarrow +0$ であるから, はさみうちの原理を用いて,

$$A = \frac{1}{1 + a^2} - \frac{(2a)^2}{2(1 + a^2)^2} = \frac{1 - a^2}{(1 + a^2)^2}$$

以上より,

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \theta(h) = (1 + a^2)AB = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

IV

関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で、その 2 次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ はいずれも連続とし、すべての実数 x に対して $f''(x) \geq 0$ を満たすとする。 xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における法線上に点 $Q(a, b)$ を $PQ = 1$, $b < f(t)$ を満たすようにとるとき、以下の各問いに答えよ。

問 1 $\overrightarrow{PQ}$ を求めよ。 答えのみでよい。

問 2 a, b を t の式で表せ。 答えのみでよい。

問 3 問 2 の a, b をそれぞれ $a(t), b(t)$ と表すとき、 $b'(t) = f'(t)a'(t)$ が成り立つことを示せ。

問 4 T_1, T_2 は $T_1 < T_2$ を満たす実数とする。 t が T_1 から T_2 まで変化するとき、2 点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_P(T_1, T_2), L_Q(T_1, T_2)$ で表す。 $L_Q(T_1, T_2)$ と $L_P(T_1, T_2)$ の差を $\Delta L(T_1, T_2)$ とする：

$$\Delta L(T_1, T_2) = L_Q(T_1, T_2) - L_P(T_1, T_2)$$

このとき次が成り立つことを示せ。

$$\Delta L(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

問 5 問 4 までの結果を踏まえて、関数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ に対して、 $\Delta L(T_1, T_2)$ において同時に $T_1 \rightarrow -\infty$, $T_2 \rightarrow \infty$ としたときの極限值

$$\lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow \infty} \Delta L(T_1, T_2)$$

を求めよ。

解答

問 1 $\overrightarrow{PQ}$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$ 。

$$b < f(t), |\overrightarrow{PQ}| = 1 \text{ より } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}} \begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

問 2

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}} \begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}} \\ f(t) - \frac{1}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a(t) = t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}}, \quad b(t) = f(t) - \frac{1}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}}.$$

問 3

$$\begin{aligned} b'(t) &= f'(t) + \frac{\frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}}}{1 + \{f'(t)\}^2} \\ &= f'(t) \cdot \left(1 + \frac{f''(t)}{(1 + \{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} a'(t) &= 1 + \frac{f''(t)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} - f'(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \cdot f'(t) \cdot f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2} \\ &= 1 + \frac{f''(t) + (1+\{f'(t)\}^2) - \{f'(t)\}^2 \cdot f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 1 + \frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② より $b'(t) = f'(t)a'(t)$ が成り立つ。(証明終了)

問 4

$$\begin{aligned} L_P(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt \\ L_Q(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\{a'(t)\}^2 + \{b'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

ここで, $b'(t) = f'(t)a'(t)$ であるから,

$$\begin{aligned} L_Q(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\{a'(t)\}^2 + \{f'(t)a'(t)\}^2} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\{a'(t)\}^2(1+\{f'(t)\}^2)} dt \end{aligned}$$

である. さらに, $f''(t) \geq 0$ から $a'(t) > 0$ より

$$L_Q(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} a'(t)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt$$

である. よって

$$\begin{aligned} \Delta L(T_1, T_2) &= L_Q(T_1, T_2) - L_P(T_1, T_2) \\ &= \int_{T_1}^{T_2} (a'(t) - 1)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2} dt. \quad (\text{証明終了}) \end{aligned}$$

問 5 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ であるから

$$\frac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^t}{e^{2t} + 1}.$$

よって

$$\Delta L(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} dt.$$

$x = e^t$ とおくと $\Delta L(T_1, T_2) = 2 \int_{e^{T_1}}^{e^{T_2}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ と書ける.

ここで $x = \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおき, $e^{T_1} = \tan \theta$ となる θ を θ_1 , $e^{T_2} = \tan \theta$ となる θ を θ_2 とすると,

$$\begin{aligned}\Delta L(T_1, T_2) &= 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \\ &= 2(\theta_2 - \theta_1).\end{aligned}$$

ここで $T_1 \rightarrow -\infty$, $T_2 \rightarrow \infty$ とすると, $\theta_1 \rightarrow +0$, $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となることから

$$\begin{aligned}\lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow \infty} \Delta L(T_1, T_2) &= \lim_{\theta_1 \rightarrow +0, \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Delta L(T_1, T_2) \\ &= \lim_{\theta_1 \rightarrow +0, \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \pi\end{aligned}$$

となる.

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

YMS

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

