

埼玉医科大学(前期) 数学

2019年 1月27日実施

1 次の問い(問1～3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ.

問1 不等式

$$1 \leq \log_e n \leq 12$$

を満たす自然数 n の桁数 p は

$$\boxed{1} \leq p \leq \boxed{2}$$

である. ただし, $0.4342 < \log_{10} e < 0.4343$ である.

問2 三角形 ABC において, 辺 BC を 5:4 に外分する点を D, 辺 CA を 3:2 に内分する点を E, 線分 BE の延

長と線分 AD との交点を F とする. このとき, 四角形 ABCF の面積は三角形 ABC の面積の

$$\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}} \frac{\boxed{4}}{\boxed{6}}$$

倍である.

問3 関数

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

の区間 $x \leq \frac{1+3\sqrt{3}}{3}$ における最大値は

$$\frac{\boxed{7}}{\boxed{11}} + \frac{\boxed{8}}{\boxed{12}} \sqrt{\boxed{10}}$$

である.

解答

問1

$$1 \leq \log_e n \leq 12$$

$$\iff e \leq n \leq e^{12} \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できるので, $0.4342 < \log_{10} e < 0.4343$ であるから

$$10^{0.4342} < e < 10^{0.4343}$$

であり, e の整数部分は1桁である.

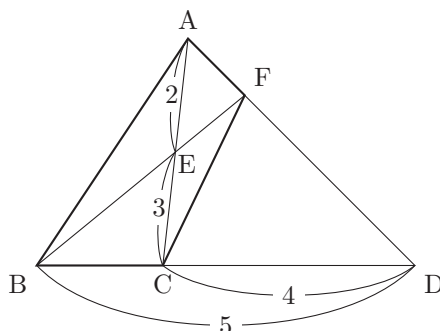
また, $5.2104 < \log_{10} e^{12} < 5.2116$ であるから

$$10^{5.2104} < e^{12} < 10^{5.2116}$$

であり, e^{12} の整数部分は6桁である.

したがって, ① を満たす自然数 n は1桁～6桁であり, $1 \leq p \leq 6$ である.

問 2



$\triangle ACD$ と直線 BF を用いるとメネラウスの定理より

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{DF}{FA} = 1.$$

よって、 $DF : FA = 15 : 2$ である。また、面積の比を考えると、

$$\triangle ABC = \frac{1}{5} \triangle ABD$$

$$\triangle CDF = \frac{DF}{DA} \times \frac{DB}{DC} \times \triangle ABD$$

$$= \frac{15}{17} \times \frac{4}{5} \times \triangle ABD$$

$$= \frac{12}{17} \triangle ABD$$

であるから、四角形 $ABCF$ の面積を S とすると

$$S = \left(1 - \frac{12}{17}\right) \triangle ABD$$

$$= \frac{5}{17} \times 5 \times \triangle ABC$$

$$= \frac{25}{17} \triangle ABC$$

別解

$DF : FA = 15 : 2$ である。さらに $\triangle BDF$ と直線 AC を用いるとメネラウスの定理より

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DA}{AF} \cdot \frac{FE}{EB} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{FE}{EB} = 1.$$

よって、 $FE : EB = 8 : 17$ である。すなわち $\triangle ABC : \triangle ACF = 15 : 8$ であるため、

$$S = \frac{17+8}{17} \times \triangle ABC = \frac{25}{17} \triangle ABC.$$

問 3 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ より、 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$ である。

$f'(x) = 0$ を満たす解は、 $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ であることから、増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで,

$$f(x) = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$\iff x^3 - x^2 - 2x + 1 - f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = 0$$

を満たす x を求める. 3つの解を α, β, γ とおく.

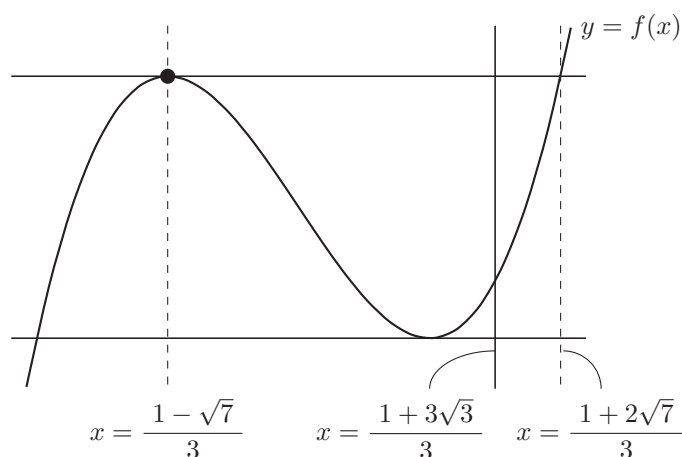
$y = f(x)$ と $y = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ は $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ で接するので, $\alpha = \beta = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ としてよい. 解と係数の関係より $\alpha + \alpha + \gamma = 1$ であるため,

$$\gamma = 1 - 2\alpha = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$$

である. さらに,

$$\frac{1+3\sqrt{3}}{3} = \frac{1+\sqrt{27}}{3} < \frac{1+\sqrt{28}}{3} = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$$

であるから, $f(x)$ を最大とする x の値は $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ である.



また, $f(x)$ を $\frac{1}{3}f'(x)$ で割ると

$$f(x) = \frac{1}{3}f'(x)\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{14}{9}x + \frac{7}{9}$$

となる. $f'\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = 0$ であるから

$$f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{14}{9} \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{3} + \frac{7}{9} = \frac{7+14\sqrt{7}}{27}.$$

2 次の文章を読み、下の問い (問 1～3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$0 \leq \theta < 2\pi$ として、不等式

$$4 \sin^2 \theta + 2 \cos 2\theta \cos \theta + \cos \theta - 3 \geq 0 \quad (1)$$

問 1 $\cos \theta = x$ とおき、 $|x| \leq 1$ の範囲で式 (1) の左辺を x の関数 $f(x)$ でおくと

$$f(x) = \boxed{13} x^3 - \boxed{14} x^2 - \boxed{15} x + \boxed{16}$$

であり、因数分解すると

$$f(x) = (x - \boxed{17}) (\boxed{18} x + \boxed{19}) (\boxed{20} x - \boxed{21})$$

である。

問 2 不等式 (1) の解は

$$\frac{\boxed{22}}{\boxed{23}} \pi \leq \theta \leq \frac{\boxed{24}}{\boxed{25}} \pi, \frac{\boxed{26}}{\boxed{27}} \leq \theta \leq \frac{\boxed{28}}{\boxed{29}} \pi, \theta = \boxed{30}$$

(ただし、 $\boxed{22} < \boxed{26}$) である。

問 3 問 1 の $f(x)$ について、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{31}}{\boxed{33}} \frac{\boxed{32}}{\boxed{34}}$$

である。

解答

問 1 (1) を変形すると、

$$4(1 - \cos^2 \theta) + 2(2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta + \cos \theta - 3 \geq 0.$$

ここで、 $\cos \theta = x$ とおくと、左辺は

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(1 - x^2) + 2(2x^2 - 1)x + x - 3 \\ &= 4x^3 - 4x^2 - x + 1 \\ &= (x - 1)(2x + 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

となる。

問 2 $f(x) \geq 0$ を解くと、

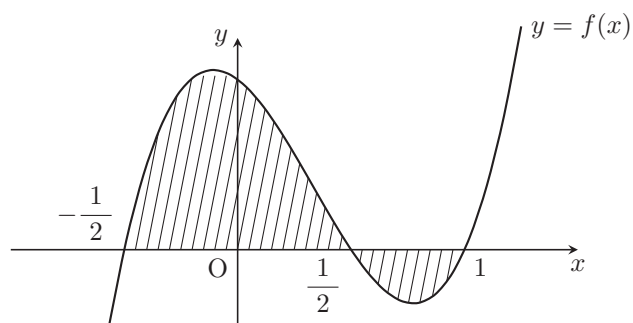
$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, 1 \leq x$$

である。 $x = \cos \theta$ として $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと

$$\theta = 0, \frac{1}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

となる。

問 3 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $x = \pm \frac{1}{2}, 1$ であり、図は以下のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 4x^2 - x + 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^3 + 4x^2 + x - 1)dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (-4x^2 + 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^3 + 4x^2 + x - 1)dx \\
 &= 2 \left[-\frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{37}{48}.
 \end{aligned}$$

3 次の文章を読み、下の問い (問 1～3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

z を 1 でない複素数, n を 2 以上の整数として,

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \quad (2)$$

とおく. 以下では i を虚数単位とする.

問 1 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

$$S_8 = \frac{\boxed{35}}{\boxed{36}} + \frac{\boxed{37}}{\boxed{39}} \sqrt{\boxed{38}} i$$

である.

問 2 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 < \theta < 2\pi$) とおく. 式 (2) の両辺の虚部どうしが等しいことから

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta = \frac{-\sin n\theta + \boxed{40} \sin(n-1)\theta + \boxed{41} \sin \theta}{\boxed{42} - \boxed{43} \cos \theta}$$

となる.

問 3 問 2 の結果において $\theta = \frac{\pi}{n}$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\boxed{44} + \boxed{45} \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

となる. これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\boxed{46}}{\pi}$$

である.

解答

問 1 $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき, $z = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$ であるから, $z^6 = 1$.

このとき, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ である.

$$\begin{aligned} S_8 &= (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5) + z^6 + z^7 \\ &= 1 + z \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

問 2

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \\ &= \frac{z^n - 1}{z - 1} \\ &= \frac{(z^n - 1)(\bar{z} - 1)}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} \\ &= \frac{z^n \bar{z} - z^n - \bar{z} + 1}{z \bar{z} - z - \bar{z} + 1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで,

$$(\text{分母}) = |z|^2 + 1 - (z + \bar{z}) = 2 - 2\cos\theta$$

である. また, 分子の虚部だけ取り出して計算すると,

$$\operatorname{Im}(z^n) = \sin n\theta, \operatorname{Im}(\bar{z}) = \sin(-\theta), \operatorname{Im}(z^n \bar{z}) = \sin(n\theta - \theta)$$

であるから

$$(\text{分子の虚部}) = \sin(n-1)\theta - \sin n\theta - \sin(-\theta).$$

したがって, ① の虚部は

$$\frac{-\sin n\theta + \sin(n-1)\theta + \sin\theta}{2 - 2\cos\theta}$$

である. また, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ の虚部は

$$0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta = \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta$$

である. こうして,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta = \frac{-\sin n\theta + \sin(n-1)\theta + \sin\theta}{2 - 2\cos\theta}$$

である.

問 3

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \frac{-\sin\pi + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) + \sin\frac{\pi}{n}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

ここで, $\frac{\pi}{n} = \alpha$ と表すと,

$$\begin{aligned} \frac{2\sin\alpha}{2 - 2\cos\alpha} &= \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} \\ &= \frac{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)}{(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)} \\ &= \frac{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

これを用いて,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right) \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (1 + 1) \\
 &= \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

注釈

区分求積法により

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \int_0^1 \sin(\pi x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

と計算できる.

4 次の文章を読み、下の問い (問 1～2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

5 個の黒石と 5 個の白石がある。これを実無作為に横一列に並べる。

問 1 黒石が 5 個連続して並ぶ確率は $\frac{\boxed{47}}{\boxed{48} \boxed{49}}$ である。

問 2 黒石が 4 個連続して並ぶ確率は $\frac{\boxed{50}}{\boxed{51} \boxed{52}}$ である。ただし、黒石が 5 個連続した並び方は含めない。

問 3 黒石と白石のいずれか一方または両方が 4 個連続して並ぶ確率は $\frac{\boxed{53}}{\boxed{54} \boxed{55}}$ である。ただし、同じ色の石が 5 個連続した並び方は含めない。

解答

黒石 5 個と白石 5 個を 1 列に並べるとき、その場合の数は

$$\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252 \text{ (通り)}$$

である。これらの場合は同様に確からしい。以下、黒石を B、白石を W と表すことにする。

問 1 黒石 5 個を 1 個にまとめて並べればよい。すなわち、

$\boxed{\text{BBBBB}}$, W, W, W, W, W

の並べ方を考えて 6 通り。ゆえに求める確率は、

$$\frac{6}{252} = \frac{1}{42}.$$

問 2 黒石が 4 個連続して並ぶのは、

$\boxed{\text{BBBB}}$, B, W, W, W, W, W

の並べ方を考えればよい。ただし、 $\boxed{\text{BBBB}}$ と B は隣合わないで、まず白石 5 個を 1 列に並べて、その隙間と両端の 6 箇所に $\boxed{\text{BBBB}}$ と B を順番に入ればよい。
したがって、

$${}_6P_2 = 30 \text{ (通り)}$$

であり、求める確率は

$$\frac{15}{252} = \frac{5}{42}.$$

別解

$\boxed{\text{BBBB}}$, B, W, W, W, W, W の並べ方を考えると

$$\frac{7!}{5!} = 42 \text{ (通り)}$$

である。このうち、 $\boxed{\text{BBBB}}$, B が隣り合うのは、その入れ替えも意識して、問 1 から $6 \times 2 = 12$ 通りある。したがって

$$\frac{42 - 12}{252} = \frac{5}{42}.$$

問3 黒石が4個連続で並ぶ確率は $\frac{5}{42}$ であり、同様に白石が4個連続で並ぶ確率も $\frac{5}{42}$ 。ただし、この中には、

黒石も白石も共に4個連続で並ぶ場合 … (ア)

が重複し、さらに

黒石は4個連続で並ぶが白石が5個連続で並ぶ場合 … (イ)

白石は4個連続で並ぶが黒石が5個連続で並ぶ場合 … (ウ)

が含まれているので、これらを取り除けばよい。

(ア) BBBB と B, WWWW と W が隣り合わないよう並べるので、 $4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$ 通り。

(イ) BBBB と B と WWWWW を BBBB と B が隣り合わないよう並べるので $2 \times 1 \times 1 = 2$ 通り。

(ウ) (イ) と同様に 2 通り。

したがって

$$\frac{5}{42} + \frac{5}{42} - \frac{8+2+2}{42} = \frac{4}{21}.$$

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

YMS

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

