解答速報

東京女子医科大学　数学

2019年 1月24日実施

$\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくとき，

$$S_1 = 1,\ S_{n+1} = 3S_n + 4n^3 + 1 \quad (n \geqq 1)$$

を満たす．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　S_n を n を用いて表せ．

解答

(1)

$$S_{n+1} = 3S_n + 4n^3 + 1 \qquad \cdots\cdots①$$

$$S_{n+2} = 3S_{n+1} + 4(n+1)^3 + 1 \quad \cdots\cdots②$$

② − ① より

$$S_{n+2} - S_{n+1} = 3(S_{n+1} - S_n) + 12n^2 + 12n + 4$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 12n^2 + 12n + 4 \qquad \cdots\cdots③$$

ここで，$b_n = a_{n+1} + pn^2 + qn + r$，$b_{n+1} = 3b_n$ とおく．このとき，この 2 式から

$$a_{n+2} + p(n+1)^2 + q(n+1) + r = 3(a_{n+1} + pn^2 + qn + r)$$

$$\Longleftrightarrow a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2pn^2 + 2(q-p)n - p - q + 2r \quad \cdots\cdots④$$

③ と ④ が一致するとき，

$$\begin{cases} 12 = 2p \\ 12 = 2(q-p) \\ 4 = -p - q + 2r \end{cases} \Longleftrightarrow (p,\ q,\ r) = (6,\ 12,\ 11)$$

すなわち，$b_n = a_{n+1} + 6n^2 + 12n + 11$ とおけば，

$$b_1 = a_2 + 6 + 12 + 11 = 36,\ b_{n+1} = 3b_n$$

であるから，

$$b_n = 36 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n+1}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n - 6n^2 - 12n - 11 \\ &= 4 \cdot 3^{n+1} - 6(n+1)^2 - 5 \quad (n \geqq 1) \end{aligned}$$

$$a_n = 4 \cdot 3^n - 6n^2 - 5 \qquad (n \geqq 2)$$

また，$a_1 = S_1 = 1$ はこの式を満たすので，

$$a_n = \mathbf{4 \cdot 3^n - 6n^2 - 5} \quad (n \geqq 1)$$

(2)　(1) より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(4 \cdot 3^k - 6k^2 - 5) \\ &= 12 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5n \\ &= \mathbf{2 \cdot 3^{n+1} - 2n^3 - 3n^2 - 6n - 6}. \end{aligned}$$

Ⅱ

$f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ とおく．$y = f(x)$ のグラフの $x > 0$ の部分に点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ をとり，直線 OP を l_1 とする．また l_1 に直交し点 P を通る直線を l_2 とし，l_2 と x 軸との交点を Q とおく．

(1)　三角形 OPQ の面積 $S(t)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ．

解答

(1)　点 P が $(t,\ f(t))$ であるから，直線 l_1 の傾きは $\dfrac{f(t)}{t}$ である．

l_1 に直交し点 P を通る直線 l_2 の方程式は,

$$y - f(t) = -\frac{t}{f(t)}(x-t) \quad \cdots\cdots①$$

x 軸との交点の x 座標は ① に $y=0$ を代入し,

$$\begin{aligned}
-f(t) &= -\frac{t}{f(t)}(x-t) \\
\Longleftrightarrow x - t &= \frac{\{f(t)\}^2}{t} \\
\Longleftrightarrow \qquad x &= \frac{\{f(t)\}^2}{t} + t \\
&= \frac{(t+2)^2}{t(t^2+2t+2)} + t
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{(t+2)^2}{t(t^2+2t+2)} + t\right\}\cdot\frac{t+2}{t^2+2t+2} \\
&= \boldsymbol{\frac{(t+2)(t^6+4t^5+8t^4+8t^3+5t^2+4t+4)}{2t(t^2+2t+2)^3}}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} S(t) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\cdot t\left\{\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2\left(1+\dfrac{2}{t}\right)^2}{t^5\left(1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)^2} + 1\right\}\cdot\frac{t\left(1+\dfrac{2}{t}\right)}{t^2\left(1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)} \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t^4}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{2}{t}\right)^2}{\left(1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)^2} + 1\right\}\cdot\frac{1+\dfrac{2}{t}}{1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{III}}$

0, 2, 4, 6, 8 の中から異なる 4 つの数字を用いて 2000 以上の整数を作る.

(1) 整数は全部で何通りあるか.

(2) 4 の倍数は何通りあるか.

(3) 6 の倍数は何通りあるか.

(4) 12 の倍数は何通りあるか.

解答

(1) 千の位が, 0 を除いた 4 通りで, 下 3 桁は残った 4 個の数字から 3 つを選んで並べればよいから,

$$4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 4 \times 24 = \mathbf{96}(\text{通り})$$

(2) 下 2 桁が 4 の倍数であればよい. 下 2 桁の数字を並べていくと,

$$04,\ 08,\ 20,\ 24,\ 28,\ 40,\ 48,\ 60,\ 64,\ 68,\ 80,\ 84$$

0 を含んだ 6 個それぞれに対して, ${}_3\mathrm{P}_2 = 6$ 通り.

0 を含まない 6 個それぞれに対しては, $2 \times 2 = 4$ 通り.

よって $6 \times 6 + 6 \times 4 = \mathbf{60}$ 通り.

(3) すべて数字が偶数なので, 6 の倍数になるには, 4 個の数字の和は 3 の倍数になればよい.

$\{0, 2, 4, 6\}$ と $\{0, 4, 6, 8\}$ の組み合わせをそれぞれ並べて $(3 \times 3!) \times 2 = \mathbf{36}$ 通り.

(4) 12 の倍数は, 3 の倍数かつ 4 の倍数であるから, (3) の 2 つの組み合わせをそれぞれ並べ替えて, 4 の倍数となるものの個数を求める.

$\{0, 2, 4, 6\}$ のうち, 下 2 桁が 04, 20, 24, 40, 60, 64

$\{0, 4, 6, 8\}$ のうち, 下 2 桁が 04, 08, 40, 48, 60, 64, 68, 80, 84

0 を含んだ 9 個それぞれに対しては $2! = 2$ 通り.

0 を含まない 6 個それぞれに対しては 1 通り.

よって, $2 \times 9 + 1 \times 6 = \mathbf{24}$ 通り.

$\boxed{\text{IV}}$

$f(x) = (x-1)^2 + a\log x$ とおく．

(1)　$f(x)$ が $x > 0$ に少なくとも 1 つの極値をもつとき，実数 a が満たす条件を求めよ．

(2)　$f(x)$ が $x > 0$ に 2 つの極値をもつとき，実数 a が満たす条件を求めよ．

解答

真数条件より $x > 0$ である．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1) + \frac{a}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 2x + a}{x} \\ &= \frac{a - (-2x^2 + 2x)}{x}. \end{aligned}$$

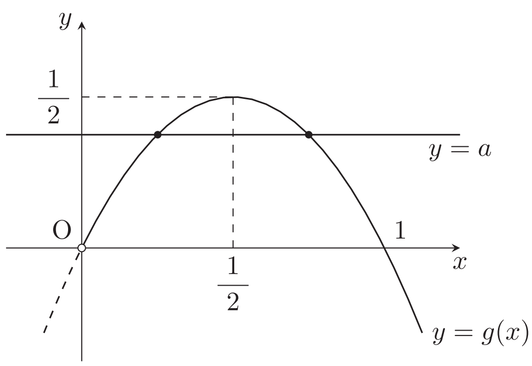
$f'(x)$ の符号は，a と $g(x) = -2x^2 + 2x$ の大小に対応する．

$$\begin{cases} a < -2x^2 + 2x \text{ のとき } f'(x) < 0 \\ a > -2x^2 + 2x \text{ のとき } f'(x) > 0 \end{cases}$$

であるから，図のように $y = g(t)$ と $y = a$ が $x > 0$ で交わるとき，極値を持つ．

(1)　$x > 0$ で少なくとも 1 つの交点が存在すればよいので，$\boldsymbol{a < \frac{1}{2}}$.

(2)　$x > 0$ において 2 点で交われればよいので，$\boldsymbol{0 < a < \frac{1}{2}}$.



別解

$$f'(x) = 2(x-1) + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x}$$

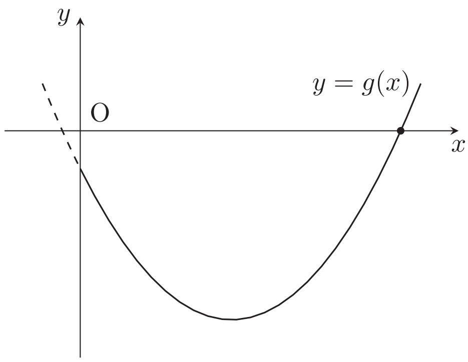
ここで，$g(x) = 2x^2 - 2x + a$ とおく．$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致する．

(1)　$x > 0$ で，$f'(x)$ の符号変化があればよい．

つまり，$g(x)$ が $x > 0$ で符号変化がある a の条件を求める．

$y = g(x)$ の軸が $x = \frac{1}{2}$ であるから，$x > 0$ で符号変化するには，$g(x) = 0$ の判別式を D とするとき，$D > 0$ であればよい．

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a > 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a < \frac{1}{2}}$$

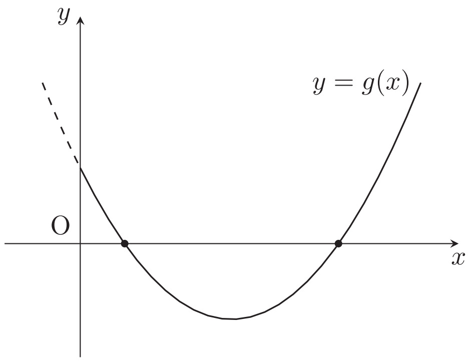


(2)　$x>0$ で $f'(x)$ の符号変化が 2 回あればよい.

つまり，$g(x)$ が $x>0$ で 2 回だけ符号変化する a の条件を求める.

$g(x)=0$ の判別式 $D>0$ かつ，$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)>0$ が成り立てばよい.

よって，$\dfrac{1}{2}>a$ かつ $a>0$ より，$\boldsymbol{0<a<\dfrac{1}{2}}$.



講評

$\boxed{1}$ 数列（漸化式）

(1) (2) ともに典型題だが，$4n^3+1$ と次数が高いので，計算ミスには注意したい．

$\boxed{2}$ 極限

(1) の $S(t)$ を求める際，どこまで計算すればよいか戸惑うだろう．

(2) の極値計算は (1) が分かれば容易．

$\boxed{3}$ 場合の数

(1) で 96 通りと，そこまで総数が多くないため，すべて書き出してもよいかもしれない．いずれにせよ，もれなく重複なく，正確に数え上げたい．

$\boxed{4}$ 微分の応用（数 3）

「極値を持つ条件」に関する問題は経験したことがあるだろう．この問題はぜひとも得点したい．

【TOPIC】

- 女子医では頻出の整数問題が出題されなかった．
  （$\boxed{2}$ では整数の性質が使われている）
- 問題毎に得意不得意が分かれるだろう．全体として 60 %取りたい．