1

次の各問いに答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　複素数 $\xi=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ について次の問いに答えよ。ただし，n は 2 以上の整数とし，i は虚数単位とする。

(1−1)　$1+\xi+\xi^2+\xi^3+\cdots+\xi^n$ の値を求めよ。

(1−2)　次の数列の和を求めよ。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}$　　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$

(2)　与えられたベクトル $\vec{a}\neq\vec{0}$ に対して，別のベクトル $\vec{b}$ を取る。$\vec{b}$ が，$\vec{a}$ と垂直なベクトル $\vec{c}$ と平行なベクトル $\vec{a_1}$ に分解されるとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　関数 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ $(x\geqq 0)$ の逆関数を求めよ。その定義域も書け。

(1)　(1−1)　1

(1−2)　① −1　② 0

(2)　$\vec{c}=\vec{b}-\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$

(3)　定義域：$x\geqq 1$，$y=\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

2

次の問いに答えよ。ただし，(1)(2) は答のみを解答欄に記入せよ。

公平なサイコロを 1 回振るごとに，偶数の目が出たら 1 (万円) 獲得し，奇数の目が出たら 1 (万円) 損失するという賭けを行う。所持金 0 でこの賭けを n 回繰り返した際の損益額の合計を Z_n (万円) とする。ただし，$Z_0=0$ とする。

(1)　$M_n=\displaystyle\max_{0\leqq i\leqq n} Z_i$ とするとき，確率 $P(M_4=k)$，$k=0$，1，2，3，4 の値をそれぞれ求めよ。ただし，$\displaystyle\max_{0\leqq i\leqq n} Z_i$ は $0\leqq i\leqq n$ における Z_i の最大値を表す。

(2)　$T_n=\#\{i\mid i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ (Z_i=0\cap Z_{i+1}=1)\cup(Z_i=1\cap Z_{i+1}=0)\}$ とするとき，確率 $P(T_4=k)$，$k=0$，1，2，3，4 の値をそれぞれ求めよ。ただし，$\#A$ は集合 A の要素の個数を表す。

(3)　任意の k に対して $P(M_5=k)$ と $P(T_5=k)$ の間に成り立つ関係を求めよ。

(1)　$P(M_4=0)=\dfrac{3}{8}$　　$P(M_4=1)=\dfrac{1}{4}$

$P(M_4=2)=\dfrac{1}{4}$　　$P(M_4=3)=\dfrac{1}{16}$

$P(M_4=4)=\dfrac{1}{16}$

(2)　$P(T_4=0)=\dfrac{3}{8}$　　$P(T_4=1)=\dfrac{1}{4}$

$P(T_4=2)=\dfrac{1}{4}$　　$P(T_4=3)=\dfrac{1}{16}$

$P(T_4=4)=\dfrac{1}{16}$

(3)　$P(M_5=k)=P(T_5=k)$

※　所持金が負になる場合も認めて解答している。

3

次の各問いに答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　次のように数列 a_n を定める。

$$a_1=2016,\ a_2=2017,\ a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1−1)　a_5 を求めよ。

(1−2)　a_{2017} を求めよ。

(2)　白球 5 球，黒球 2 球が入っている袋から，同時に 4 球をとり出し，その中に含まれる白球の個数を X とする。

(2−1)　X の平均値（期待値）を求めよ。

(2−2)　X の分散を求めよ。

(1)　(1−1)　$a_5=1$

(1−2)　$a_{2017}=2017$

(2)　(2−1)　$\dfrac{20}{7}$

(2−2)　$\dfrac{20}{49}$

4

次の問いに答えよ。答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$a+b=1$，$a^2+b^2=3$ のとき a^7+b^7 の値を求めよ。

(2)　次の式の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{215}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}$$

(3)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $2x^2+xy-5x-y^2+4y-3\geqq 0$ を満たしているとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(4)　関数 $f(x)=x+a\cos x$ $(a>1)$ は $0<x<2\pi$ において極小値 1 を取る。この範囲における $f(x)$ の極大値を求めよ。

(5)　座標平面上の曲線 $9y^2=(x+3)^3$ と y 軸とで囲まれた図形の周の長さを求めよ。

(1)　29

(2)　5

(3)　$\dfrac{1}{5}$

(4)　$\pi-1$

(5)　$\dfrac{2}{3}(7\sqrt{7}+3\sqrt{3}-8)$

(講評)

昨年に比べ分量も大幅に増え難化した。非常に得点しにくいセットである。

大問1はできれば全部とりたいところであるが、(2)の問題文が読み取りにくい。

大問2は問題文を読み取るのに一苦労で、ほとんどの人はなにも手がつかなかったに違いない。M_n とはつまり n 回試行した際の損益額の最大値、T_n は試行の際に損益額が 0 と 1 万円の間を「通過」した回数である。試行の回数が少ないので全て書き出す((1)(2)は16通り、(3)は 32通り)のが実践的であるが、試験会場では難しかったであろう。なお(2)まで答えが出せれば(3)の結果は予想できる。

大問3(1)は順に代入していけば周期性に気付けるはず。これは完答したい。(2)の期待値と分散は数 B の確率分布の範囲であり手が出ない受験が多かっただろう。

大問4は典型問題がほとんどなのでここは確保したいが、ひとつひとつがやや難しめなので 3 問は解きたい。

英数合わせて140分なのでできるだけ数学に時間を割き、数学全体でなんとか 5 割を目標としたい。

$\boxed{9}$

楕円 $x^2+4y^2=4$ 上の点Pと点 $(1,\ 0)$ の距離 l の最小値を求めよ。

$\boxed{10}$

$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ のとき

(1) $\overline{\alpha}=\alpha^6$ を示せ。

(2) $\beta+\overline{\beta}$，$\beta\overline{\beta}$ を求めよ。

(3) $\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta$ を求めよ。

$\boxed{11}$

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|\leqq\sqrt{3}$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，θ の値の範囲を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。

(2) ベクトル $\vec{c}$，$\vec{d}$ が $\vec{a}=4\vec{c}-3\vec{d}$，$\vec{b}=3\vec{c}-2\vec{d}$ を満たすとき，内積 $\vec{c}\cdot\vec{d}$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{12}$

不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx\geqq0$ が任意の実数 x，y，z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{13}$

(1) 任意の実数 a に対して，不等式 $a^4+b^3\geqq a^3+ab^3$ が成り立つような実数 b の値を定めよ。

(2) 任意の整数 a に対して，不等式 $a^4+b^3\geqq a^3+ab^3$ が成り立つような整数 b の値を定めよ。